PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 13/14 — 20. Juli 1942 — Redaktionsschluß für Nr. 15/16 am 1. August 1942 — 43. Jahrgang

INHALT:

E. Brüche, Walter Henneberg. S. 205.

Abhandlungen:

G. Aschermann und E. Justi, Elektrische Leitfähigkeit, magnetische Widerstandsvermehrung, Halleffekt und Supraleitung von Rhenium. S. 207.

A. Scheibe und U. Adelsberger, Normalfrequenz-Aussendung der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt über den Deutschlandsender werktäglich $10^h\,45^{min}$ für Mai 1942. S. 213.

G. Hansen, Die Entwicklung der Prismen-Spektroskope seit Kirchhoff und Bunsen. S. 213.

A. Smakula, Über die Reflexionsverminderung an optischen Gläsern. S. 217.

H. Martin, Einschwingvorgang und Stoßaufzeichnung. Mit Tafel XVII. S. 222.

E. Bagge, Die Zertrümmerung des Deuterons durch schnelle Neutronen. Mit Tafeln XVIII und XIX. S. 226.

K. H. Höcker, Wirkungsquerschnitte der Reaktionen zwischen Neutronen und Deuteronen. S. 236.

E. Mollwo, Ein einfacher Apparat zur Vorführung der Gruppengeschwindigkeit. S. 257.

Besprechungen. S. 258.

Nachrichten. S. 260.

Berichtigung. S. 260.

Angebote. S. 260.

Walter Henneberg

Dr. Walter Henneberg.

Walter Henneberg war nach wenigen Wochen Wehrdienst im Sommer 1940 wieder zu seiner Arbeit zurückgekehrt. Januar 1942 wurde er als Panzerschütze abermals einberufen. Am 24. März machte er im Osten sein erstes Gefecht gegen einen an Zahl überlegenen Gegner mit. Am 28. März wurde seine Truppe erneut angegriffen. Auf dem Rückwege von einem Meldegang erfüllte sich sein Geschick am fünften Tage des Einsatzes an der Front. –

Walter Henneberg wurde am 2. Mai 1910 in Berlin geboren. Seine Schulzeit begann in Oldenburg und endete am Reform-Realgymnasium in Kiel, wo er 1928 das Reifezeugnis erhielt. Nun wandte er sich dem Studium der Mathematik und Physik zu, das ihn von Kiel über Göttingen nach München führte. Dort erhielt der angehende theoretische Physiker von Sommerfeld das Thema für die atomphysikalische Dissertationsarbeit: „Zur Streuung von Elektronen an schweren Atomen" (2 und 1). Nach Abschluß seines Studiums, bei dem er Mitglied der Studienstiftung des Deutschen Volkes war, führte er mit Unterstützung der Notgemeinschaft noch eine weitere atomphysikalische Untersuchung (3) durch. Bereits diese seine ersten Arbeiten, die einen beachtlichen Beitrag zur quantitativen Darstellung der atomaren Stoßprozesse lieferten, lassen seinen besonderen Sinn für klare und auf das Wesentliche gerichtete Darstellung erkennen.

Juli 1933 trat der junge befähigte Theoretiker in das AEG-Forschungsinstitut ein. In seinem neuen Arbeitskreis fand er die werdende geometrische Elektronenoptik vor, deren Bearbeitung er sich mit Eifer zuwandte. Eine Reihe von Arbeiten aus den nächsten

Jahren lassen seine Erfolge erkennen. Diese Veröffentlichungen, die er größtenteils allein (4–10), teils mit anderen (12–14) durchführte, handeln von Elektronenlinse und Elektronenspiegel, von der Massenspektroskopie und der Elektronenmikroskopie. Die Arbeiten, die durch die Berührung zwischen Experiment und Theorie angeregt waren, ergaben nun ihrerseits wiederum Anregungen für experimentelle Untersuchungen, aus denen technische Anwendungen hervorgingen (15).

Im Laufe der Zeit entwickelte sich bei ihm stärker und stärker das schon immer erkennbare literarische und pädagogische Interesse. Die Mitarbeit an der Monographie des Laboratoriums über die geometrische Elektronenoptik (1934) hatte ihm Gelegenheit gegeben, die Darstellung anderer kritisch zu beurteilen und erhebliche Teile selbst zu gestalten. Bei der Ergänzung dieses Buches (1936) schrieb er den theoretischen Teil (16), und an der Neuauflage (1941) wirkte er wiederum durch kritische Beurteilung der Darstellung mit. Es entstanden in diesen Jahren, aber auch in neuerer Zeit, eine Anzahl von Berichten über die geometrische Elektronenoptik und das Elektronenmikroskop (11, 16–21), teils als Auszüge aus eigenen Vorträgen.

Seine Fähigkeiten, das Wesentliche darzustellen, und sein Wunsch, sich eine immer umfassendere Literaturkenntnis anzueignen, ließen ihn in seiner Freizeit für fast alle in Frage kommenden Berichteorgane referieren von der Mathematik, über die Physik und Chemie bis zur Elektrotechnik. Mehrere Tausend Referate meist fremdsprachlicher Arbeiten über Quantenmechanik, Atom- und Molekülbau, Relativitätstheorie und Elektronik sprechen ebenso für seinen wissenschaftlichen Überblick wie für seinen Fleiß.

Seine literarisch-pädagogischen Fähigkeiten, sein juristisches Empfinden und seine bestimmt vertretene Auffassung einer Sache führten ihn auch zur Patentbearbeitung. Als die AEG den Aufbau eines besonderen Patentbüros für ihr Forschungsinstitut plante, konnte sie kaum einen geeigneteren Mann als ihn, der sich inzwischen einer patentrechtlichen Ausbildung unterzogen hatte, finden. Im Besitze des vollen Vertrauens aller Institutsmitglieder vermochte er die ihm übertragene Aufgabe in idealer Weise zu lösen. Von der Idee einer Anmeldung, die ihm von den experimentellen Arbeiten aus zugetragen wurde, sind Formulierung und Vertretung vor dem Reichspatentamt fast ausschließlich sein Werk; selbst bei manchen Ansprüchen kann man zweifelhaft sein, ob sie nicht mehr das Eigentum des ungenannten Bearbeiters sind. So schuf er, einer der besten Kenner der technischen Elektronik, eine vorbildliche Patentbearbeitung und erwarb sich durch seinen ehrlichen und geraden Sinn die Zuneigung seiner Mitarbeiter. Wenn seine Schriftsätze auch die Schwächen der gegnerischen Stellung deutlich aufdeckten und häufig ein ironischer Unterton diese Schwächen unterstrich, so war er doch stets der Achtung seiner Gegner gewiß. Ein Kamerad und Berufskollege, der mit ihm seine letzten Tage erlebte, zeichnet sein Bild überzeugend, wenn er sagt: „Immer hilfsbereit, stets freundlich, stets bemüht, die Forderungen, die an ihn als Soldaten gestellt wurden, nach besten Kräften zu erfüllen. Das Schönste, das man über einen Menschen sagen kann, galt für ihn: er hatte keine Feinde." –

Noch nicht zweiunddreißig Jahre alt, mußte uns Walter Henneberg, nachdem er sich in $8^1/_2$jähriger Arbeit einen eigenen Arbeitsbereich geschaffen hatte, verlassen. Die Lücke, die dieser Verlust in die Arbeitsgemeinschaften der Laboratorien für Elektronik unseres Instituts gerissen hat, wird sich auch nach Jahren kaum geschlossen haben. Für uns aber, seine engeren Mitarbeiter, die wir ihm mehrere Jahre näher standen, gilt es nicht nur von einem treuen Arbeitskameraden Abschied zu nehmen.

Niemand weiß, ob sich Walter Henneberg in künftiger Zeit ganz der Laufbahn des Patentmannes verschrieben, ob er noch mehr in der Organisation des Schrifttums aufgegangen oder sich wieder stärker wissenschaftlich orientiert hätte. Doch wir wissen, daß er ein Mensch und Physiker von Rang war, der seine Aufgabe erfüllt, ganz gleich, welchen Weg ihn das Schicksal führt.

Ernst Brüche

Veröffentlichungen

1) Streuung von Elektronen an Quecksilber. Naturwiss. **20**, 561–562, 1932.
2) Zur Streuung von Elektronen an schweren Atomen (Münchener Dissertation). Zeitschr. f. Phys. **83**, 555–580, 1933.
3) Anregung von Atomen in inneren Schalen durch langsame Protonen und α-Teilchen. Zeitschr. f. Phys. **86**, 592–604, 1933.
4–6) Feldkombinationen zur Geschwindigkeits- und Massenspektrographie, I, II und III. Ann. d. Phys. (5) **19**, 335–344, 1934; **20**, 1–12, 1934; **21**, 390–404, 1934.
7) Über achromatische elektrische Elektronenlinsen. Zeitschr. f. Phys. **90**, 742–747, 1934.
8) Discussion on "Note on a demonstration of a low-voltage electron microscope using electrostatic focusing". I. E. E. Journ. **76**, 111–112, 1935.
9) Das Potential von Schlitzblende und Lochblende. Zeitschr. f. Phys. **94**, 22–27, 1935.
10) Über das Auflösungsvermögen des Elektronenmikroskops für durchstrahlte Objekte. Zeitschr. f. Instrumentenkunde **55**, 300–305, 1935.
11) Das Elektronenmikroskop. ETZ. **56**, 853–856, 1935.

12) Die Potentialverteilung in Schlitzblende und Lochblende (gemeinsam mit A. Glaser). Zeitschrift f. techn. Phys. **16**, 222–230, 1935.
13) Der chromatische Fehler bei elektronenoptischen Anordnungen, insbesondere beim Bildwandler (gemeinsam mit A. Recknagel). Zeitschr. f. techn. Phys. **16**, 230–235, 1935.
14) Zusammenhänge zwischen Elektronenlinse, Elektronenspiegel und Steuerung (gemeinsam mit A. Recknagel). Zeitschr. f. techn. Phys. **16**, 621–623, 1935.
15) Zur Wirkungsweise des Elektronenvervielfachers, I. (gemeinsam mit R. Orthuber und E. Steudel). Zeitschr. f. techn. Phys. **17**, 115 bis 120, 1936.
16) Geometrische Elektronenoptik (gemeinsam mit E. Brüche). Ergebn. d. exakt. Naturwiss. **15**, 365–421, 1936.
17) Geometrische Elektronenoptik. Naturwiss. **26**, 302–304, 1938.
18) Das Übermikroskop mit elektrostatischen Linsen. ETZ. **61**, 773–776, 1940.
19) Zur Entwicklung des Übermikroskops. Dtsch. Technik **8**, 436, 1940.
20) Elektronenmikroskop, Übermikroskop und Metallforschung. Stahl u. Eisen **61**, 769–777, 1941.
21) Begriffe und Bezeichnungen in der geometrischen Elektronenoptik (gemeinsam mit E. Brüche). Arch. f. techn. Messen, im Druck.

ABHANDLUNGEN

Elektrische Leitfähigkeit, magnetische Widerstandsvermehrung, Halleffekt und Supraleitung von Rhenium

Von G. Aschermann[1]) und E. Justi

Mitteilungen aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt in Berlin-Charlottenburg

1. Aufgabenstellung

Nachdem in den letzten Jahren zahlreiche Messungen über die Änderung des elektrischen Widerstandes reiner einkristalliner Metalle unter der Einwirkung starker Magnetfelder bei tiefen Temperaturen ausgeführt worden sind, konnte mit Hilfe des hierzu entwickelten reduzierten Kohler-Diagrammes (1) erstmals ein Überblick über den Zusammenhang zwischen Leitungsmechanismus und äußerer Elektronenanordnung und damit der Stellung des Metalles im periodischen System gewonnen werden (2). Hierbei zeigte es sich zunächst, daß alle Metalle infolge der namentlich bei tiefen Temperaturen hervortretenden Beeinflussung der Leitungselektronen durch das Kristallgitter größenordnungsmäßig höhere relative Widerstandszunahmen erleiden als ein isotropes freies Elektronengas. Die Möglichkeit einer universellen Metalltheorie mußte zwar angesichts der bei gleichen Argumentwerten (H/τ_r) um Zehnerpotenzen differierenden Widerstandsänderungen verschiedener Metalle verneint werden, jedoch unterschieden sich wenigstens die Kurven mehrerer Metalle von ähnlicher Kristallstruktur und Valenz voneinander so wenig, daß sie zu Leitfähigkeitstypen zusammengefaßt werden konnten. Diese Typen lassen sich in zwei Gruppen einteilen, deren eine durch mit H/τ_T unbegrenzt beschleunigt zunehmende Widerstandsvermehrung ausgezeichnet ist, während die andere Gruppe offenbar einem Grenzwert von etwa $\Delta\varrho/\varrho = 10$ bis 100 zustrebt. In Übereinstimmung mit der Theorie der Brillouin-Zonen in Metallkristallen ergab sich im einzelnen, daß die Metalle der 2., 4. und 6. Spalte des periodischen Systems, die bekanntlich nur infolge einer Überlappung dieser Zonen metallisch leiten, durch hinreichend starke Magnetfelder bei gleichzeitiger Einfrierung der Gitterschwingungen voraussichtlich zu Isolatoren gemacht werden können, während der Widerstand der Metalle der 1., 3. und 5. Spalte durch beliebig starke Magnetisierung und Abkühlung wahrscheinlich höchstens verhundertfacht werden kann, wie es die ungerade Elektronenzahl infolge der Schaffung eines nicht voll besetzten äußeren Energiebandes verstehen läßt. Seitdem diese Übersicht gegeben wurde, hat Reinhart Schulze (3) in diesem Laboratorium den interessanten Sonderfall der Platinmetalle mit ihren inneren, nicht voll aufgefüllten Elektronenschalen untersucht und festgestellt, daß unter den Metallen der 8. Spalte *Pt* mit seiner geraden Elektronenzahl wie die Metalle der 2., 4. und 6. Spalte beschleunigte Widerstandszunahme zeigt, während *Rh* als Träger einer ungeraden Elektronenzahl erwartungsgemäß eine Widerstandssättigung aufweist. Zur Vervollständigung des Bildes über den Zusammenhang zwischen Periodischem System und Leitungsmechanismus fehlen daher nur noch Messungen an einem Metall der 7. Spalte, die bisher nur deshalb unterbleiben mußten, weil die beiden in Betracht kommenden Leiter Rhenium und Mangan nicht in genügender chemischer Reinheit bzw. mit hinreichend geringem Restwiderstand zur Verfügung standen. Nachdem es inzwischen gelungen ist, eine Probe von nur 1,7 Proz. Restwiderstand zu erhalten, wurden Messungen der

1) Studiengesellschaft für elektrische Beleuchtung, Berlin O 17.

Abhängigkeit des elektrischen Widerstandes des *Re* von Temperatur und magnetischem Querfeld ausgeführt, die nachfolgend beschrieben und mittels des reduzierten Kohler-Diagrammes im Zusammenhang mit den bisherigen Ergebnissen über die Verteilung der Leitungstypen auf das periodische System diskutiert werden; die Erörterungen über den Leitungsmechanismus werden durch eine Messung des noch unbekannten Halleffektes von *Re* ergänzt. Ferner werden neue Messungen über den bisher noch umstrittenen spezifischen Widerstand des *Re* mitgeteilt.

Schließlich wird das *Re* angesichts der Reinheit der jetzt verfügbaren Proben erneut auf Supraleitfähigkeit untersucht, und die Messungen werden hierbei möglichst tief (0,85° abs) unterhalb von 2,3° abs erstreckt, bis zu welcher Temperatur die *Re*-Probe von Meißner und Voigt (6) mit ihrem noch erheblich größeren Restwiderstand ($z = 11$ Proz.) normalleitend geblieben war.

2. Herstellung der Präparate

Als Ausgangsprodukt für die Herstellung der Proben diente das Rheniumpulver, wie es Feit (4) in den Vereinigten Chemischen Fabriken zu Leopoldshall, Zweigstelle der Kaliwerke Aschersleben, herstellt; bei etwa 99,8 Proz. *Re*-Gehalt ist es hauptsächlich durch *Mo*, daneben durch etwas *K* und *As* verunreinigt. Diese beiden niedrig schmelzenden Stoffe werden durch den angewandten Glühprozeß bei 2400° C weitgehend verdampft. Das übrigbleibende *Mo* sollte nach der Norburyschen Regel im *Re* keinen beträchtlichen Zusatzwiderstand verursachen, weil *Mo* und *Re* benachbarten Spalten des periodischen Systems angehören.

Aus dem Pulver wurden unter einem Druck von 7000 kg/cm² zwei Parallelepipede von $3 \times 3 \times 40$ mm gepreßt, und eines von $6 \times 11 \times 30$ mm, die anschließend eine Stunde lang bei 1000° C in einer H_2-Atmosphäre vorgesintert wurden; schließlich wurden die Stäbchen im Wolframrohrofen wiederum in H_2-Atmosphäre auf einer Thoroxydunterlage 20 Minuten lang bei 2400° C geglüht. Durch diesen Glühprozeß wurde die gewünschte Verminderung der Porosität herbeigeführt. Die Stäbchen schrumpften hierbei auf etwa $2,5 \times 2,5 \times 34$ mm, erreichten aber mit $d = 14,8$ nicht die von K. Becker (5) röntgenographisch ermittelte Idealdichte von 20,53.

Auf diese Weise wurden chemisch reine *Re*-Stäbchen ohne Fremdmetallseele erhalten, wie sie das von Moers (5) angewandte Aufwachsverfahren nicht vermeiden läßt. Es wäre zwar erwünscht gewesen, auf diese Weise statt quasiisotroper Proben Einkristalle zu erhalten, jedoch läßt sich eine Diffusion der Fremdmetalle aus der Seele in den Aufwachskörper beim Hochglühen nicht vermeiden, und die resultierende Erhöhung des Restwiderstandes hätte die beabsichtigte Widerstandssenkung durch Anwendung tiefer Temperaturen unmöglich gemacht.

3. Versuchsanordnung

Die elektrischen Widerstände bzw. Hallspannungen wurden mit dem fünfdekadigen thermokraftfreien Dießelhorst-Kompensator in Verbindung mit einem Siemens-Supergalvanometer, Normalbüchsen und Normalelement gemessen; diese Anordnung unterscheidet sich nicht von der zu den vorangegangenen Arbeiten verwendeten. Dagegen wurden einige Änderungen an der Pumpanlage vorgenommen, um anläßlich der Untersuchung auf Supraleitfähigkeit auch *He*-Siedetemperaturen unterhalb von 1° abs erreichen zu können; hier wurde die Gaede-Leyboldsche Dampfstrahlpumpe Modell L eingesetzt, die ihr Sauggeschwindigkeitsmaximum in dem Druckbereich besitzt, in dem rotierende Pumpen nicht mehr gut und Diffusionspumpen noch nicht gut arbeiten. Die richtige Wahl dieser Pumpe bestätigte sich dadurch, daß in einer gewöhnlichen Vakuummantelflasche von über 100 cm³ Inhalt Siededrucke von 0,02 Torr entsprechend 0,85° abs erreicht wurden; diese Temperaturen werden ohne die bekannten Sondermaßnahmen wie Einbau einer Blende zur Dämmung des *He-II*-Filmes, Verminderung der Menge des flüssigen *He* auf wenige Kubikzentimeter zur Entlastung der Pumpe sowie Verbesserung der Adiabasie durch ein umhüllendes *He*-Bad erzielt. Als Vorpumpe dient die rotierende Siemens-Pumpe, die bei den bisherigen Untersuchungen des Kältelaboratoriums 1,13° abs erreichen ließ [vgl. z. B. Meißner und Voigt (6)].

4. Spezifischer Wert und Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes bei $H = 0$; Supraleitfähigkeit

An die beiden Proben wurden mit Lötzinn Strom- und Spannungsdrähte angelötet, um Widerstandsmessungen mit dem Dießelhorstschen Kompensator vornehmen zu können. Der Eispunktwiderstand der mit *Re* 3 bezeichneten Probe wurde zu 0,001117 Ω gemessen, woraus sich bei einem Abstand der Potentialdrähte von 27 mm und einem aus mehreren mikrometrischen Dickenmessungen gemittelten Durchmesser von $2,51 \times 2,69 = 6,75$ mm² ein spezifischer Widerstand von $10^4 \varrho_{273} = 0,253\ \Omega$ je Meter Länge und

Zahlentafel I

Gemessene, reduzierte und berechnete Widerstandsverhältnisse des Rheniums bei $H = 0$

Autoren / $T°$ abs	Meißner und Voigt (6)	Moers (5)	*Re* 42/3 beobachtet	*Re* 42/3 reduziert	Nach Grüneisen (8) berechnet mit $\Theta_D = 283°$	Nach Grüneisen (8) berechnet mit $\Theta_D = 300°$
373.2		1.311	1.455	1.403	1.422	1.577
273.2	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
88.2	0,2849			$0{,}190_6$	$0{,}206_1$	$0{,}193_3$
83.0	0,2474	(0,234$_3$)				
77.7			$0{,}160_9$	$0{,}142_6$	$0{,}160_5$	$0{,}148_1$
20.4	0,110	(0,07)	$0{,}018_3$	$0{,}001_3$	$0{,}0_2 10_8$	$0{,}0_3 8_1$
14.0			$0{,}018_3$	$0{,}001_3$	$0{,}0_3 17$	$0{,}00_3 12$
4.22	0,110		0,021	0,000	$0{,}0_6 57$	$0{,}00_6 42$
2.0						
1.30	0,109					
0.96			$0{,}010_8$			
0.85			$0{,}005_9$			
0.85			0,000			
z	0,109	0,07	0,017	0,000	0,000	0,000

Quadratmillimeter Querschnitt ergibt. Der Eispunktwiderstand der anderen Probe *Re* 4 beträgt 0,0008288 Ω, und hieraus würde sich infolge eines Potentialdrahtabstandes von 21,5 mm und eines mittleren Querschnittes von $6{,}5_0$ mm² ein spezifischer Widerstand von $10^4\,\varrho_{273} = 0{,}25_1$ m mm² errechnen lassen; diese gute Übereinstimmung ist insofern kein sicherer Beweis für eine Genauigkeit der ϱ_{273}-Messung auf wenige Zehntel Prozent, als sich das Stäbchen *Re* 42/4 beim Hochglühen etwas gekrümmt hatte, wodurch die Genauigkeit seiner Längen- und Querschnittsmessung beeinträchtigt ist. Jedenfalls ist aber der von uns gefundene Zahlenwert $10^4\,\varrho_{273} = 0{,}253\,\Omega$cm noch höher als derjenige von Meißner und Voigt (6) ($10^4\,\varrho_{273} = 0{,}189\,\Omega$cm) und der von Moers (5) ($10^4\,\varrho_{273} = 0{,}211\,\Omega$cm)[2]; wir möchten unseren Messungen insofern den Vorzug geben, als unsere Proben nur 1,7 Proz. bzw. 1,9 Proz. Restwiderstand besitzen gegenüber etwa 6 Proz. bei Moers und 11 Proz. bei Meißner und Voigt, womit sie zweifellos die reinsten bisher untersuchten Präparate sind. Jedoch läßt sich ein bestimmter Betrag von ϱ_{273} so lange nicht als sicher ansehen, als eine auffallende Diskrepanz zwischen der tatsächlichen Dichte ($d = 14{,}8$) und der behaupteten Idealdichte ($d = 20{,}53$) besteht.

In Zahlentafel I sind unsere Meßergebnisse für die Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes der besseren Probe *Re* 42/3 zwischen 10° und 373° abs zusammengestellt und mit den bisher vorhandenen Messungen von Meißner und Voigt sowie Moers verglichen.

In der vorletzten Spalte sind die mittels der Nernst-Matthießenschen Regel

$$r_{red} = (r_{beob} - z)\,(1 - z)$$

auf den Restwiderstand $z = 0$ reduzierten idealen Widerstandsverhältnisse r_{red} angeführt, um einen Vergleich mit der theoretischen Temperaturfunktion durchführen zu können. Diese theoretischen Werte r_{ber} wurden nach der neuen Grüneisenschen Funktion (8) berechnet, wozu die einzige eingehende Materialkonstante, die charakteristische Temperatur Θ_D, als gegeben angesehen wurde. Θ_D wurde aus der Lindemannschen Schmelzpunktsformel $\Theta_D = 137\sqrt{T_S/MV_A^{2/3}}$ mit $T_S = 344°$ abs, $M = 186{,}31$, $V_A = 9{,}07$ zu 283° berechnet. Auf eine Anpassung des Θ_D-Wertes an die Widerstandsmessungen wurde verzichtet, weil diese sinnvoll bei tiefen Temperaturen, im T^5-Bereich, erfolgen müßte. Infolge des hohen Θ-Wertes ist aber schon bei 20,4° abs der Idealwiderstand r_{red} so klein und daher unsicher gegenüber dem Restwiderstand z, daß eine solche Anpassung undurchführbar wird. Die Differenz zwischen r_{red} und r_{ber} im Temperaturbereich der siedenden Luft könnte durch eine Erhöhung des Θ_D-Wertes um etwa 2° beseitigt werden. Die erzielte Übereinstimmung zwischen r_{red} und r_{ber} berechtigt dazu, den Zahlenwert $\Theta_D = 283°$ zur Berechnung des atomaren Widerstandes $R_A = \varrho_\Theta V_A^{-1/3}$ zu benutzen, wie er zur Diskussion des Leitvermögens im Zusammenhang mit dem periodischen System gebraucht wird. Mit dem Temperaturkoeffizienten $\alpha_{0°}^{100°} = 0{,}46$ Proz. findet man

$$R_A = 2{,}53 \cdot 10^{-5} \sqrt[3]{9{,}075} = 12{,}5\,\Omega\mathrm{cm}^{-1}.$$

[2] Die Angabe $10^4\,\varrho_{273} = 0{,}061\,\Omega$cm von Noddack (7) dürfte wohl weniger als Präzisionsbestimmung als als erste informatorische Messung zu werten sein.

Ebenso kann dieser Θ_D-Wert verwendet werden, um die im folgenden Abschnitt dargestellten Meßergebnisse für die magnetische Widerstandsänderung auf das Argument H/τ_T zu reduzieren, wie es für die Diskussion der Widerstandszunahme im Kohlerschen Diagramm erforderlich ist.

5. Meßergebnisse für die Vermehrung des elektrischen Widerstandes im magnetischen Querfeld

Die magnetische Widerstandsvermehrung wurde, wie schon mehrfach beschrieben, im Querfeld des großen Boasmagneten gemessen. Wie die Zahlentafel II zeigt, ruft das maximale Querfeld von 34,3 kG bei 80° abs eine relative Widerstandsvergrößerung von $\Delta\varrho_{H,T}/\varrho_{H=0,T} = 1{,}9_7$ Proz., bei

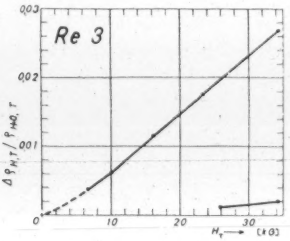


Abb. 1. Magnetische Widerstandsvermehrung. $\Delta\varrho H, T/\varrho H = 0, T$ des Rhenium 42/3 bei 20,4° abs (obere) und 83° abs (untere Kurve) als Funktion des magnetischen Querfeldes H (kG) nach Zahlentafel II.

20,4° abs von $\Delta\varrho_{H,T}/\varrho_{H=0,T} = 26{,}6$ Proz. hervor. Die graphische Darstellung dieser Zahlentafel I (Abb. 1) läßt erkennen, daß die Widerstandszunahme bei 20,4° abs nach dem allgemein bekannten quadratischen Anfang von 10 kG an merklich linear mit dem Querfeld ansteigt. Messungen unterhalb von 20,4° abs wurden nicht ausgeführt, weil bei dieser Temperatur r_T schon fast temperaturunabhängig ist, und wegen der Abhängigkeit der Widerstandszunahme von H/τ_T eine weitere Vergrößerung von $\Delta\varrho_{H,T}/\varrho_{H=0,T}$ nicht zu erwarten ist. In Zahlentafel I sind außer der Variablen H auch die Größen $H/\tau_T = H/r_T \cdot r_{\Theta}$ angegeben, die bei der vergleichenden Darstellung der relativen Widerstandszunahme im reduzierten Kohlerschen Diagramm als Argument eingehen.

Zahlentafel II

Relative magnetische Widerstandsvermehrungen $\Delta\varrho_{H=T}/\varrho_{H=0,T}$ des *Re* 42/3 bei 80° und 20,4° abs als Funktion des magnetischen Querfeldes H (kG) bzw. Argumentes H/τ_T [kG]

H	$\Delta\varrho_{H,T}/\varrho_{H=0,T}$	H/τ_T kG
$T = 80°$ abs; $r_{80°} = 0{,}16_{58}$		
34,3	$0{,}010_6$	$2{,}0_7 \cdot 10^2$
25,1	0,015	$1{,}5 \cdot 10^2$
$T = 20{,}4°$ abs; $r_{20,4°} = 0{,}0179$		
34,3	$0{,}26_6$	$1{,}91 \cdot 10^3$
23,4	$0{,}17_5$	$1{,}30 \cdot 10^3$
16,2	$0{,}11_5$	$9{,}0 \cdot 10^2$
10,1	$0{,}0_2$	$5{,}6 \cdot 10^2$
$0{,}6_5$	0,37	$3{,}7 \cdot 10^2$

6. Messung des Halleffektes

Der Halleffekt wurde an dem in Abschnitt 2 erwähnten plattenförmigen Formkörper gemessen, von dem mittels einer Karborundscheibe Teile weggeschliffen wurden derart, daß ein länglicher Streifen (23 × 3,5 mm) mit zwei seitlichen Zungen stehenblieb. Auf diese Weise wurde den bekannten Anforderungen an ein Halleffektpräparat nach 1. Länge: Breite und 2. Identität des Materials von Präparat und Hallelektroden innerhalb des Magnetfeldes genügt. Da die Hallkonstante erfahrungsgemäß merklich temperaturunabhängig ist, wurden nur Messungen bei Zimmertemperatur ausgeführt; dabei lieferte der Boasmagnet im Interferrikum von 2 mm Weite 48,2 kG. Bei 1,005 Amp. Belastungsstrom wurde mit dem Dießelhorstschen Kompensator eine Hallspannung von $1{,}38_6 \cdot 10^{-6}$ Volt gemessen, die bei zehn Einzelmessungen um weniger als ± 2 Proz. schwankte. Da die Stärke des Plättchens nach mikrometrischer Dickenmessung auf $\pm 0{,}00_3$ mm gleichmäßig $1{,}10_2$ mm beträgt, ergibt sich somit, im praktischen Maßsystem (Ampere, Gauß, Zentimeter) gemessen, eine Hallkonstante von $10^8 A_H = +3150$. Hierbei wurde das Vorzeichen des anomalen Halleffektes durch eine Vergleichsmessung an einem *Cu*-Phantom sichergestellt.

7. Diskussion der Versuchsergebnisse

Die beobachtete Temperaturabhängigkeit des normalen elektrischen Widerstandes (bei $H = 0$) läßt sich angenähert durch die neue vereinfachte Grüneisensche Temperaturfunktion $\varrho = T\sigma(\Theta/T)$ (8) wiedergeben, wenn man die einzige eingehende Materialkonstante als durch die kalorischen Daten vorgegeben mit $\Theta_D = 283°$ einführt; die Übereinstimmung könnte noch verbessert werden, wenn man statt dessen den Zahlenwert von Θ_D den Widerstandsmessungen anpaßte, wodurch man zu $\Theta_D \approx 300°$ gelangte, einem Betrag, der durchaus noch im Unsicherheitsbereich des Koeffizienten 137 der Lindemannschen Schmelzpunktsformel liegen dürfte.

Diese Anpassung wäre aber aus doppeltem Grunde ohne physikalischen Wert. Einerseits müßte zu einer solchen Anpassung das Grüneisensche Temperaturgesetz in seiner erweiterten Form $\varrho = T\sigma(1 + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2)$ verwendet werden, weil sonst ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$) bei hoher Temperatur erfahrungswidrig $\varrho \sim T$ würde; zu dieser Anpassung wäre also eine Wiederholung der Moersschen Hochtemperaturmessungen an ebenso reinen Proben wie *Re* 42/3 nötig. Aber auch dann möchten wir die Anpassung von Θ_{II} nicht, wie bisher vielfach üblich, bei mitteltiefen Temperaturen vornehmen, weil die Grüneisensche Funktion hier zunächst nur die rein mathematische Aufgabe einer glatten Verbindung zwischen den gesicherten Grenzgesetzen für hohe und für tiefe Temperaturen darstellt und weil die nähere theoretische Untersuchung durch Kohler (9) erwiesen hat, daß diese Funktion im Zwischenbereich den Widerstand bei $H = \infty$, also einen größeren Wert als bei $H = 0$, wiedergibt. Andererseits können wir die an sich sinnvolle Anpassung im Bereich tiefer Temperaturen nicht durchführen, weil trotz der Fortschritte in der Reinigung des *Re* der Restwiderstand z immer noch größer als der ideale r_{rest} ist, so daß seine Reduktion auf $z \to 0$ vorläufig allzu unsicher bleibt. Infolgedessen kann nicht einmal entschieden werden, ob sich das Verhalten des *Re* besser dem neuen T^5- oder dem älteren T^4-Gesetz fügt.

Daß der Halleffekt anomal ist, konnte nicht sicher vorhergesehen werden, da nicht aufgefüllte innere Elektronenschalen sowohl einen normalen wie anomalen Effekt als verständlich erscheinen lassen. So zeigt das *Mn* als das andere Metall dieser Spalte VIIa des Periodischen Systems bekanntlich einen normalen Effekt mit $10^8 A_H = -930$ (Zahn und Schmidt (10)).

Die Widerstandsvermehrung im magnetischen Querfeld entspricht der Erwartung vom Standpunkt der metallischen Typenlehre, denn an Stelle der den $2n$wertigen Metallen des „*Ba*-Typus" (11) eigentümlichen, mit dem Feld beschleunigt und unbeschränkt anwachsenden Widerstandszunahme zeigt *Re* nach Abb. 1 für mittelgroße Feldstärken eine Proportionalität zwischen $\Delta\varrho_{H,T}/\varrho_{H=0,T}$ und H, die erfahrungsgemäß als Übergang vom beschleunigten Anwachsen bei kleinen H zur Sättigung bei großen H zu deuten ist. Um nun diese Widerstandszunahmemessungen mit denjenigen an anderen Metallen rationell, also unter Eliminierung von Unterschieden in Temperatur, Gitterschwingungsenergie, Restwiderstand usw. vergleichen zu können, tragen wir die relativen Widerstandszunahmen als Funktion der Variablen H/τ_T ein, wodurch wir das reduzierte Kohlersche Diagramm der Abb. 2 erhalten. Hiernach beginnt das durch die Messungen der Zahlentafel II gewonnene Kurvenstück zwischen den Kurven für die ebenfalls ungeradwertigen Metalle *Al* und *In*, schneidet infolge seiner geringeren Neigung die *Al*-Kurve und tangiert schließlich die Kurve für *Rh*. Damit ordnet sich das *Re* in die Beziehungen zwischen Widerstandszunahme und

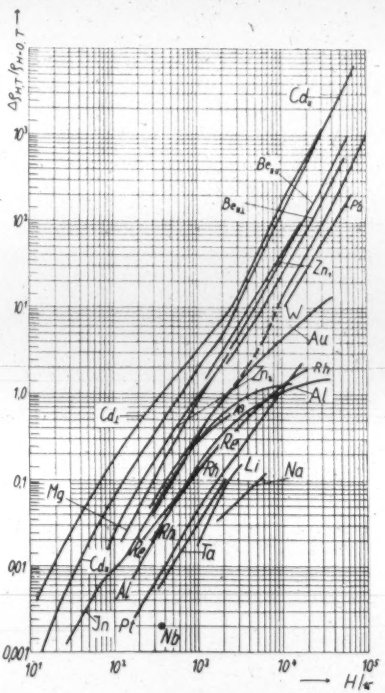


Abb. 2. Lage der *Re*-Kurve.
$\Delta\varrho_{H,T}/\varrho_{H=0,T} = \mathfrak{f}(H/\tau_T)$ im reduzierten Kohlerschen Diagramm.

Periodischem System bzw. Elektronenanordnung ein, wie sie der eine von uns (12) zusammenfassend dargestellt hat; denn seine Kurve liegt deutlich innerhalb des Bandes der einem Grenzwert zustrebenden Funktionen der ungeradwertigen Metalle, das von der Schar der steil und unbegrenzt ansteigenden $\Delta\varrho_{H,T}/\varrho_{H=0,T}$-Kurven der geradwertigen Metalle deutlich getrennt ist.

Wie die Zahlentafel I erkennen läßt, wird *Re* bei etwa 0,9° abs supraleitend, und diese Tatsache bildet insofern eine Überraschung, als man bisher angenommen hat, daß auch bei beliebiger

Annäherung an $T = 0°$ nicht alle Metalle supraleitend werden, sondern daß für den Eintritt der Supraleitfähigkeit die Zugehörigkeit zur Spalte IIb bis Va des periodischen Systems eine notwendige und hinreichende Bedingung ist. Nachdem nun der eine von uns (13) schon im Uran einen 6wertigen Supraleiter ($T_{ü} = 1{,}3°$ abs bei $z = 0{,}38 \cdot R_{273}$) entdeckt hat, erstreckt sich der Bereich der Supraleitfähigkeit durch *Re* bis in die Spalte VIIa. Unter den stark paramagnetischen bis ferromagnetischen Metallen der VIII. Spalte wird man wegen des diamagnetischen Charakters der Supraleiter ebensowenig Supraleiter erwarten wie unter den Isolatoren der Spalten VIIb und 0. Da die Alkalien bisher nur bis zu 1,13° abs hinab durchgemessen worden sind, gewinnt die alte Meinung wieder an Wahrscheinlichkeit, daß im allgemeinen sämtliche Metalle zur Supraleitung fähig sind. Die Supraleitfähigkeit des *Re* ist auch insofern bemerkenswert, als sein Atomvolumen nur $9{,}0_7$ beträgt, während nach der Clusiusschen Erfahrungsregel (14) die Supraleitfähigkeit an die Bedingung $11 \leq V_A \leq 21$ gebunden sein soll; seit der Aufstellung dieser Regel ist dies die dritte inzwischen aufgefundene Ausnahme, nachdem ihr schon Zink mit $V_A = 9{,}1_7$ und besonders Vanadium mit $V_A = 8{,}5$ widersprachen. Aber selbst wenn noch zahlreiche neue Supraleiter aufgefunden werden sollten, behält diese Regel insofern einen Wahrheitsgehalt, als das angegebene mittelgroße Atomvolumen offenbar den Eintritt der Supraleitung begünstigt.

8. Zusammenfassung

Aus reinstem *Re*-Pulver von Feit (Leopoldshall) werden durch Sintern im Hochvakuum bei 1000° C und anschließendes Hochglühen bis zu 2400° C stab- und plattenförmige Formkörper gewonnen, deren bisher unerreicht hohe Reinheit sich im Restwiderstand von nur $0{,}017\ R_{273°}$ zeigt. Diese Proben werden eingehend auf elektrischen Widerstand und galvanomagnetische Effekte untersucht. Die Temperaturabhängigkeit zwischen 373° und 0,85° abs wird tabelliert und ihre Darstellbarkeit durch die neuere Grüneisensche Temperaturfunktion (T^5-Grenzgesetz) theoretisch diskutiert. Mit $\Theta_D = 283°$, der aus der Lindemannschen Schmelzpunktformel folgenden charakteristischen Temperatur, läßt sich eine angenäherte Darstellung der Meßergebnisse erreichen. Bemerkenswert ist der hohe Temperaturkoeffizient von $\alpha_{0°}^{100°} = 0{,}46$ Proz. Der atomare Widerstand bei $\Theta_D°$ wird zu $10^6\ R_A = 12{,}5\ \Omega$cm berechnet. Durch magnetische Querfelder bis zu 34,3 kG erleidet das *Re* Widerstandsvermehrungen, die bei 20,4° abs von etwa 10 kG ab merklich linear mit der Feldstärke anwachsen und bis zu 26,6 Proz. ansteigen. Diese Widerstandsvermehrung wird im reduzierten Kohlerschen Diagramm mit derjenigen anderer Metalle rationell verglichen und in Übereinstimmung mit den Erwartungen über Zusammenhang zwischen Widerstandsvermehrung und äußerer Elektronenanordnung bzw. Periodischem System der Elemente befunden. Eine besondere Überraschung bildet die bei ~ 0,95° abs eintretende Supraleitung des *Re*; denn nachdem jetzt im Uran ein 6wertiger und nun im *Re* ein 7wertiger Supraleiter bekannt ist, erscheint die Supraleitfähigkeit nicht länger auf die Spalten IIb bis Va des periodischen Systems beschränkt. Bemerkenswert ist ferner, daß die Supraleitung trotz des niedrigen Atomvolumens ($V_A = 9{,}0_7$) eintritt.

Herrn Dr. K. M. Koch danken wir für seine Hilfe bei den Messungen.

Literaturverzeichnis

1) A. Foroud, E. Justi und J. Kramer, Physik. Zeitschr. **41**, 113, 1940.
2) E. Justi, Zeitschr. f. techn. Phys. **21**, 315, 1940.
3) Reinhart Schulze, Physik. Zeitschr. **42**, 297, 1941.
4) W. Feit, Zeitschr. f. angew. Chem. **43**, 459, 1930.
5) C. Agte, H. Alterthum, K. Becker, G. Heyne und K. Moers, Zeitschr. f. anorg. u. org. Chem. **196**, 129, 1931.
6) W. Meißner und B. Voigt, Ann. d. Phys. (V) **7**, 761, 1930.
7) W. Noddack, Metallwirtsch. **8**, 964, 1929.
8) E. Grüneisen, Ann. d. Phys. (V) **16**, 530, 1933.
9) M. Kohler, Ann. d. Phys. (V) **38**, 283, 1940.
10) H. Zahn und H. Schmidt, Verh. d. Dtsch. Physik. Ges. **9**, 98, 1907.
11) M. Kohler, Physik. Zeitschr. **39**, 9, 1938.
12) E. Justi, Zeitschr. f. techn. Phys. **21**, 315, 1940.
13) E. Justi, erscheint in der Physik. Zeitschr.
14) K. Clusius, Zeitschr. f. Elektrochem. **38**, 312, 1932.
15) G. Aschermann, E. Friederich, E. Justi und J. Kramer, Physik. Zeitschr. **42**, 349, 1941.

Berlin-Charlottenburg 2, Kältelaboratorium der PTR., den 27. April 1942.

(Eingegangen 3. Mai 1942)

Normalfrequenz-Aussendung der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt über den Deutschlandsender werktäglich $10^h\ 45^{min}$.

Die Zahlen der Spalten 2 geben an, um wieviel in 10^{-9} des Wertes der Betrag der ausgestrahlten Frequenz vom Sollwert 1000,000 000 Hz abweicht. Die Abweichung wurde mittels der Quarzuhren der Reichsanstalt bestimmt.

1	2	1	2
Mai 1942		Mai 1942	
Tag	Abweichung	Tag	Abweichung
1.	+ 16	17.	—
2.	—	18.	+ 3
3.	—	19.	+ 7
4.	— 7	20.	+ 5
5.	— 7	21.	+ 1
6.	— 10	22.	+ 4
7.	— 13	23.	— 7
8.	+ 5	24.	—
9.	— 12	25.	—
10.	—	26.	— 7
11.	— 13	27.	— 9
12.	— 13	28.	— 9
13.	— 8	29.	+ 8
14.	— 12	30.	— 17
15.	— 13	31.	—
16.	— 11		

Berlin-Charlottenburg, den 8. Juni 1942.

Physikalisch-Technische Reichsanstalt,
Abteilung II

Im Auftrage:
A. Scheibe. U. Adelsberger.

Die Entwicklung der Prismen-Spektroskope seit Kirchhoff und Bunsen[1])

Von G. Hansen

(Mitteilung aus dem Physikalischen Laboratorium der Zeiss-Werke, Jena)

Im folgendem soll eine Übersicht über Spektralapparate mit einer Vielzahl von Prismen gegeben werden, wobei in erster Linie die mechanische Einrichtung zur Bewegung der Prismen und des Fernrohrs bzw. der photographischen Kamera betrachtet wird.

Warum sind Fragen, die mit der Konstruktion von Vielprismenapparaten zusammenhängen, noch heute von Interesse? Ein bestimmtes Auflösungsvermögen läßt sich entweder mit Hilfe von einem Prisma oder mit Hilfe von einer größeren Anzahl kleinerer Prismen erzielen, bei welchen die Summe der Basislängen gleich der Basislänge des einzelnen Prismas ist. Abgesehen von Reflexionsverlusten muß auch die Lichtstärke der Anordnung mit vielen Prismen die gleiche sein, obwohl man bei m-Prismen nur m^{-2} von dem Material benötigt, das das große Prisma gleicher Leistung verbraucht. Die Größe der vom Licht durchsetzten, also gut bearbeiteten Prismenflächen ist bei m-Prismen m^{-1}. Insbesondere die Materialersparnis ist bei Verwendung von seltenem Material von großer Bedeutung. Als Nachteil der Vielprismenanordnungen steht dem der Umstand gegenüber, daß der Spektralbereich bei gleichem Bildwinkel der Kamera nur m^{-1} von dem beim Einprismenapparat ist. Je größer also die Anzahl der Prismen, desto kleiner ist der Spektralbereich, den man mit einer Aufnahme erfassen kann, und desto häufiger ist man genötigt, die Einrichtung für verschiedene Wellenlängen umzustellen (1).

Der von der Firma Steinheil, München, gebaute Apparat, mit dem Kirchhoff (2) seine Untersuchung über die Entstehung der Fraunhoferschen Linien ausführte, wies vier Prismen auf (Fig. 1), die einzeln auf der Grundplatte des Instruments aufgestellt waren. Das große Aufsehen, das Kirchhoffs Arbeit machte, äußert sich in den vielen Konstruktionen mit einer größeren Anzahl (6–9) von Prismen, die in den Jahren nach dem Erscheinen der Kirchhoffschen Arbeit in England und Amerika beschrieben wurden.

Auf dem Wege von der einfachen Anordnung Kirchhoffs, der beim Umstellen auf eine andere Farbe die vier Prismen und das Fernrohr neu einstellen mußte, können wir bis zum vollautomatischen Apparat drei Stufen der Vollkommenheit unterscheiden:

a) Durch einen Mechanismus wird die gegenseitige Lage der Prismen zwangsläufig geregelt, dagegen muß sowohl der Winkel zwischen Kollimator und Fernrohr bzw. Kamera als auch der Winkel zwischen dem ersten Prisma des Satzes einerseits und dem Kollimator anderseits vom Beobachter jeweils neu eingestellt werden.

b) Der Kollimator steht fest. Das Fernrohr wird durch einen Mechanismus zwangsläufig bei einer Verstellung des Prismensatzes zu diesem in die jeweils richtige Lage gebracht. Es ist aber gegenüber dem Kollimator beweglich.

c) Fernrohr und Kollimator stehen fest. Die Bewegung von Prismen und Spiegeln erfolgt zwangsläufig.

Die ersten Konstruktionen nach der Art von a) wurden von den Amerikanern J. P. Cooke (3) und L. M. Rutherfurd (4) veröffentlicht. Hier finden wir zum erstenmal eine

1) Gekürzte Wiedergabe eines Vortrages auf der Tagung des Gauvereins Thüringen-Sachsen-Schlesien der Deutschen Physikalischen Gesellschaft am 24. und 25. Januar 1942 in Jena.

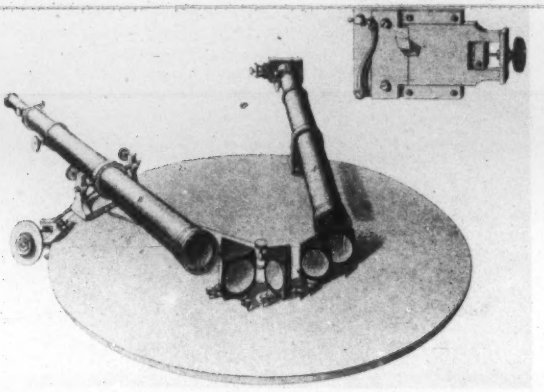


Fig. 1. Spektroskop von Kirchhoff und Bunsen, gebaut 1860 von A. Steinheil.

Anordnung, bei der die Prismen durch Gelenke unter den Basisecken miteinander zu einem Kranz verbunden sind. Cooke veröffentlichte eine kurze Notiz im Jahre 1863, eine ausführliche Beschreibung (5) erst 1866, während Rutherfurd sein Instrument 1865 genau beschrieb. Bei beiden Konstruktionen wurde der ganze Prismenkranz gegenüber Fernrohr und Kollimator auf das Minimum der Ablenkung eingestellt. Die erste Veröffentlichung über ein Instrument der Art b) geschah von J. Browning (6) 1870. Hier ist (Fig. 2) das Fernrohr mit der letzten Basisecke vom letzten Prisma einerseits verbunden und wird anderseits in einem bogenförmigen Schlitz der Grundplatte geführt. Unmittelbar nach dem Erscheinen dieser Arbeit wies R. A. Proctor (7) darauf hin, daß man das Prinzip der radialen Lenker auch zu einer mathematisch exakten Führung des Fernrohrs verwenden könnte. Diese beiden Gedanken sind aber schon im Jahre 1863 von dem Wiener Otto v. Littrow (8) verwirklicht worden, der auch schon das Prinzip der Strahlenrückkehr durch dieselben Prismen und außerdem durch dasselbe Objektiv anwandte und auf diese Art ein Instrument der Gruppe c) schuf, bei dem Fernrohr und Kollimator feststanden. Diese Arbeit ist lange Zeit nicht beachtet worden. Der Amerikaner C. A. Young (9) hat 1870 das Prinzip der Strahlenrückkehr neu entdeckt, schrieb aber gleichzeitig, daß ihm im Jahre 1869 J. N. Lockyer in England zuvorgekommen sei. Während bei den Konstruktionen von Littrow, Young und Lockyer ein Feststehen des Fernrohrs nur bei doppeltem Durchgang des Lichtes durch die gleichen Prismen erreicht wurde, ist zum erstenmal von H. Krüss (10) 1888 eine Einrichtung beschrieben worden, bei der trotz nur einfachem Durchgang durch die Prismen das Beobachtungsfernrohr fest stehen bleiben konnte. Krüss verwandte auch den Prismenkranz mit radialen Lenkern wie Rutherfurd und Browning, ließ das Licht aber nach Austritt aus dem letzten Prisma auf einen Spiegel fallen, der über der Mitte des Prismenkranzes angeordnet war. Wenn man das Licht von diesem Spiegel in einer geeigneten Richtung zurückkehren ließ und dem Spiegel zwangsläufig eine passende Drehung erteilte, konnte das Fernrohr stehenbleiben. Diese Einrichtung ist aber sehr kompliziert, sie benötigt nicht weniger als 22 gelenkige Verbindungen für sechs Prismen. Bei Anwendung des Verfahrens auf drei Prismen hätte man 16 Gelenke nötig.

An Stelle des meist verwendeten Prinzips der radialen Lenker zur Führung des Prismenkranzes wurden gelegentlich auch andere Methoden verwendet. M. Hamy (11) beschrieb 1908 eine Einrichtung, bei der von jeweils drei Prismen das 1. und 3. mit einem Zahnrad fest verbunden sind. Die Zahnräder drehen sich um die beiden Basisecken des Mittelprismas und stehen unterhalb der Basismitte im Eingriff. Nach diesem Prinzip kann man einen Prismenkranz lenken. Das Verfahren war aber damals

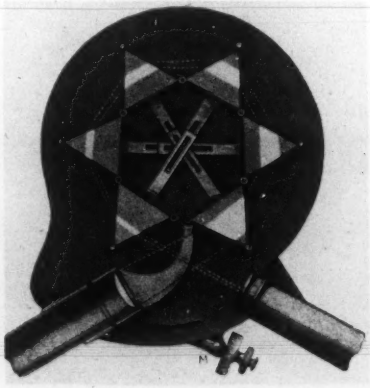


Fig. 2. Zwangsläufige Bewegung von sechs Prismen und einem Fernrohr nach J. Browning, 1870.

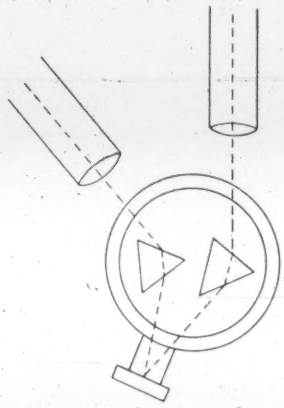


Fig. 3. Einrichtung mit zwei gemeinsam bewegten Prismen und einem drehbaren Spiegel nach Wadsworth, 1894.

keineswegs neu. Es ist anscheinend zuerst an einem Apparat verwendet worden, den Grubb für Young gebaut hat. Er wurde von W. Erck (12) 1878 beschrieben. Die Arbeit enthält keinen Hinweis auf die Mechanik und keine Abbildung. In dem Lehrbuch für Spektroskopiker von Konkoly findet sich aber auf S. 338 ein Bild, das zweifellos diesen Apparat darstellt. Hier ist von der später von Hamy beschriebenen Verzahnung Gebrauch gemacht. Auch bei einem Apparat von Thollon (13) 1879 wird das gleiche Verfahren benutzt. Später wurde es von du Bois, Elias und Löwe (14) 1909 und in etwas anderer Form von Füchtbauer und Hofmann (15) 1914 wieder verwendet.

Einen bedeutenden Fortschritt erzielte F. L. O. Wadsworth (16) 1894 (Fig. 3). Hier sind zwei Prismen auf einer gemeinsamen Grundplatte angeordnet, die um eine feste Achse gedreht wird. Fernrohr und Kollimator stehen fest. Die Rückkehr des Lichtes wird durch einen ebenen Spiegel bewirkt, der gleichfalls um eine feste Achse (unter der Mitte der Kreise in Bild 3) gedreht wird, und zwar mit der doppelten Winkelgeschwindigkeit wie die Prismen. Hier werden für zwei Prismen zwei feste Drehachsen und bei einfachem Durchgang eine Reflexion gebraucht.

Es ist bemerkenswert, daß die vielen geistvollen Konstruktionen, die in der Zeit nach der Kirchhoffschen Arbeit bis etwa 1890 beschrieben und ausgeführt worden sind, um die Jahrhundertwende aus der Literatur, und zwar auch aus Lehrbüchern und Handbüchern verschwinden. Das ist wahrscheinlich darauf zurückzuführen, daß mit der zunehmenden Verwendung photographischer Meßverfahren der Hauptwert auf vollkommene Stabilität der Apparatur und eine unveränderliche Einstellung aller Teile während langer Belichtung gelegt wurde. Konstruktionen wie die Krüsche waren zu solchen Arbeiten nicht geeignet. Die grundsätzlichen Vorteile der Vielprismenapparate gegenüber solchen mit einem Prisma sind aber immer wieder beim Bau von Spektrographen ausgenutzt worden [z. B. Weiß und Fortrat (17)]. Dagegen hat man sich meist gescheut, Mechanismen zur zwangsläufigen Bewegung der Prismen anzuwenden [W. Wien (18), J. S. Foster (19), D. H. Rank (20)].

Die modernen Konstruktionen nehmen ihren Ausgangspunkt von dem erwähnten Vorschlag von Wadsworth. Die Forderungen, die man an einen solchen Apparat stellt, sind: eine möglichst geringe Anzahl von beweglichen Teilen; wo bewegliche Teile vorkommen, soll nur eine Drehung um eine feststehende Achse erfolgen; die Anzahl der Spiegelungen soll möglichst klein sein, ebenso soll ein unnötiger Weg zwischen den Basisecken der Prismen vermieden werden, um die Abschattung im Prismensatz möglichst klein zu machen. Wadsworth (21) hat 1895 gezeigt, daß man auch bei Verwendung eines einzigen gleichseitigen Prismas sechsmaligen Lichtdurchgang, also die Wirkung von sechs Prismen, erreichen kann. Das ist also das Äußerste an Materialersparung, was möglich ist. Er benötigt dazu nur zwei feste Drehachsen, aber nicht weniger als 17 Reflexionen in seinem Apparat.

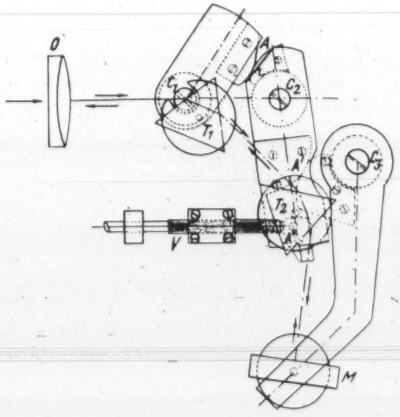


Fig. 4. Prismenanordnung des Spektrographen von Fabry und Jobin, 1904. Drehachsen bei C_1, C_2, C_3.

Diese Konstruktion wird deshalb kaum verwendet worden sein. Die wichtigste neuere Bauart ist die von Fabry und Jobin (22) 1904 (Fig. 4). Hier werden zwei Prismen in doppeltem Durchgang verwendet. Dazu wird eine Reflexion gebraucht und Drehung um drei feste Achsen.

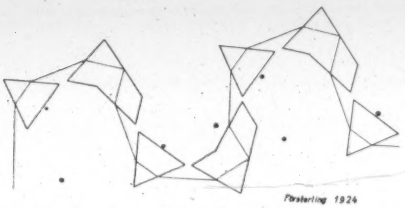


Fig. 5. Anordnung von sieben Prismen für feste Ablenkung nach K. Försterling, 1924.

Bei einfachem Durchgang würde man bei einer durch ein drittes Prisma erweiterten Konstruktion die Wirkung von drei Prismen mit vier Drehachsen und einer Spiegelung erzielen können. Der Luftweg ist bei der Ausführungsart, wie Fabry und Jobin sie beschreiben, verhältnismäßig groß. K. Försterling (23) baute 1924 eine Anordnung (Fig. 5), bei der sieben Prismen verwendet wurden. Hier waren bei einfachem Durchgang drei Reflexionen nötig und insgesamt sieben feste Drehachsen. Der Grundgedanke dieses Prismensatzes ist in dem Zeiss-3-Prismenapparat (Fig. 6) verwendet worden, bei dem nur die ersten drei Teile (sog. Försterlingscher Prismensatz) benutzt wurden. Die Ablenkung um 90° ist fest. Die Wirkung von drei Prismen wird mit drei Drehachsen und einer Reflexion erzielt. Von dieser Bauart ist bereits eine große Anzahl von Apparaten in Benutzung. Die Bauart erfüllt alle Ansprüche bezüglich Zuverlässigkeit der Einstellung, die an den Prismensatz gestellt werden können. Schwierigkeiten gibt es, wenn die Försterlingsche Anordnung mit Prismen aus Quarz ausgeführt werden soll wegen der zirkularen Doppelbrechung. Außerdem ist es bei Apparaten langer Brennweite praktisch, eine Gesamtablenkung von 180° zu haben. Eine solche Ablenkung hat die in Fig. 7 dargestellte Einrichtung, die

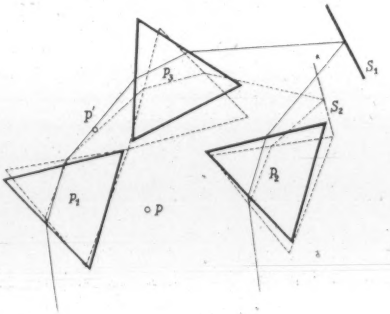


Fig. 7. Anordnung von drei gleichen Prismen mit einem Spiegel für feste Ablenkung um 180°. P: gemeinsamer Drehpunkt für die Prismen P_1 und P_2. P': Drehpunkt für Prisma P_3. S: Drehpunkt für den Spiegel (S_1 in der langwelligen, S_2 in der kurzwelligen Grenzstellung).

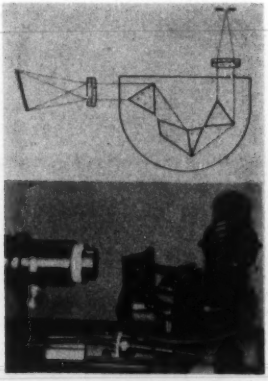


Fig. 6. Zeiß-Dreiprismenspektrograph mit Försterlingschem Prismensatz für feste Ablenkung um 90°.

außerdem die Verwendung von Quarz-Cornuprismen erlaubt. Ebenso wie bei der Försterlingschen Anordnung werden bei drei Prismen drei feste Drehachsen verwendet und bei einfachem Durchgang eine Reflexion. Gewisse Schwierigkeiten, die beim Försterlingschen Prismensatz durch Reflexe im Mittelprisma entstehen können, sind vermieden. Bei der neuen Anordnung werden die beiden äußeren Prismen P_1 und P_2, die auf einem festen Träger angeordnet sind, um eine gemeinsame Achse P gedreht. Das Mittelprisma P_3 dreht sich mit der dreifachen Winkelgeschwindigkeit um eine zweite Achse P_1, ebenso schnell wie dieses wird der Planspiegel um die dritte Achse S gedreht. In Fig. 7 sind die Teile der Einrichtung in der langwelligen Grenzstellung (stark ausgezogen) und in der kurzwelligen Grenzstellung (gestrichelt) dargestellt. Die Anordnung zeigt eine gewisse Verwandtschaft sowohl mit der von Wadsworth wie mit der von Fabry und

Jobin. Wenn man bei dem Entwurf darauf achtet, den schädlichen Luftweg zwischen den Prismen so klein wie möglich zu machen, wird man zu einer zwangsläufigen Festlegung des Prismenwinkels geführt. Sowohl der Försterlingsche Prismensatz wie die zuletzt beschriebene Anordnung sind beliebig erweiterungsfähig, indem Einheiten von je drei Prismen in beliebiger Anzahl hintereinander gesetzt werden können. Bei dem Försterlingschen Prismensatz ist zwischen zwei solche Einheiten ein Spiegelprisma gesetzt, damit nicht jeweils die zweite Einheit zu der ersten spiegelbildlich aufgebaut sein muß.

Das Interesse an dem Bau von Vielprismenapparaten ist in den letzten Jahren besonders stark geworden, da für die spektrochemische Werkstoffprüfung, insbesondere von Stählen, Apparate hoher Auflösung in Industrielaboratorien gebraucht werden. Bei solchen Apparaten wird unbedingte Zuverlässigkeit der Einstellung und einfachste Handhabung verlangt. Eine große Anzahl moderner Apparate ist tatsächlich in den letzten Jahren in Benutzung genommen worden. Die Bemerkung von W. Steubing (24), daß sich Vielprismenapparate „wegen der damit verbundenen Lichtschwächung und Verschlechterung der Abbildungsschärfe" niemals hätten einbürgern können, trifft nicht mehr zu. Man ist heute in der Lage, dafür zu sorgen, daß auch bei einer großen Anzahl von Prismen das theoretische Auflösungsvermögen annähernd erreicht wird [Keßler (25)].

Literaturverzeichnis

1) H. Kayser, Handbuch der Spektroskopie, Bd. 1, S. 571–574. Leipzig 1900.
2) G. Kirchhoff, Abh. preuß. Akad. d. Wiss., physik.-math. Kl. 63, 1861.
3) J. P. Cooke, Amer. Journ. Sci. (II) **36**, 266, 1863.
4) L. M. Rutherfurd, Amer. Journ. Sci. (II) **39**, 129, 1865.
5) J. P. Cooke, Phil. Mag. Journ. Sci. (4) **31**, 110, 1866.
6) J. Browning, Monthly Not. Roy. astronom. Soc. **30**, 198, 1870.
7) R. A. Proctor, Monthly Not. Roy. astronom. Soc. **30**, 215, 1870.
8) O. v. Littrow, Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. Wien, Abt. IIa, **47**, 26, 1863.
9) C. A. Young, Nature **3**, 110, 1870.
10) H. Krüss, Zeitschr. f. Instrumentenkunde **8**, 388, 1888.
11) M. Hamy, Journ. Phys. Radium **7**, 52, 1908.
12) W. Erck, Monthly Not. Roy. astronom. Soc. **38**, 331, 1878.
13) M. Thollon, Journ. Phys. Radium **8**, 73, 1879.
14) H. E. J. G. du Bois, G. J. Elias, F. Löwe, Arch. neerl. Sci. exact. natur. (II) **14**, 81, 1909.
15) Chr. Füchtbauer und W. Hofmann, Ann. d. Phys. **43**, 96, 1914.
16) F. L. O. Wadsworth, Phil. Mag. Journ. Sci. (7) **38**, 137, 1894.
17) P. Weiß und R. Fortrat, Arch. Sci. phys. natur. (IV) **35**, 5, 1913.
18) W. Wien, Ann. d. Phys. **69**, 325, 1922.
19) J. S. Foster, Journ. opt. Soc. Amer. **8**, 373, 1924.
20) D. H. Rank, Journ. opt. Soc. Amer. **23**, 85, 1933.
21) F. L. O. Wadsworth, Astrophys. Journ. **2**, 264, 1895.
22) Ch. Fabry und A. Jobin, Journ. Phys. Radium **3**, 202, 1904.
23) K. Försterling, Lehrbuch der Optik, S. 548. Leipzig 1928.
24) W. Steubing, Zeitschr. f. techn. Phys. **21**, 243, 1940.
25) H. Keßler, Zeitschr. f. Intrumentenkunde. **60**, 373, 1940.

Jena, den 10. Februar 1942.

(Eingegangen 19. März 1942)

Über die Reflexionsverminderung an optischen Gläsern (1)[1])

Von A. Smakula

Mitteilung aus den Optischen Werken Carl Zeiss, Jena

Einleitung

Beim Bau von optischen Instrumenten ist man in den meisten Fällen gezwungen, eine größere Anzahl von optischen Einzelteilen (Linsen und Prismen) zu verwenden, um gleichzeitig eine möglichst große Lichtstärke und eine ausreichende Bildgüte zu erreichen. Das ist z. B. der Fall bei Photo-, Astro-, Mikroobjektiven u. a. Bei vielen Geräten kommt noch eine weitere Forderung dazu, daß die Lage der optischen Bilder vorgeschrieben ist. So bedingt z. B. die Aufrichtung des Bildes bei Fernrohren eine zusätzliche Einführung von Umkehrsystemen, die aus Linsen oder Prismen bestehen. Bei größeren optischen Geräten, wie Sehrohren, Entfernungsmessern ist die Anzahl der optischen Teile noch größer. Optische Geräte mit 10–20 und noch mehr Teilen sind keine Seltenheit.

An jeder Grenzfläche zwischen Glas und Luft wird ein Teil des Lichtes reflektiert, das sich nach Fresnelschen Formeln berechnen läßt. Für die meisten optischen Gläser, deren Brechzahlen (n_d) zwischen 1,5 und 1,7 liegen, beträgt die Reflexion für den Einfallswinkel Null 4,0–6,7 Proz. Bei m-Grenzflächen ergibt sich die Gesamtreflexion R_1 unter Vernachlässigung der Mehrfachreflexionen zu

$$R_1 = 1 - (1 - \varrho)^m, \quad \text{wobei } \varrho = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \text{ ist.}$$

1) Vortrag auf der Tagung des Gauvereins Thüringen-Sachsen-Schlesien der Deutschen Physikalischen Gesellschaft am 24. und 25. Januar 1942 in Jena.

Um diesen Betrag wird die theoretische Lichtstärke von optischen Geräten durch die Reflexionsverluste herabgesetzt.

Ein Teil des reflektierten Lichtes gelangt durch mehrfache Reflexionen auch in die Bildebene, wie das durchgelassene Licht, trägt aber nicht zur Erzeugung des Bildes bei, sondern gibt Veranlassung zu Reflexbildern oder zur Verschleierung des Bildes, wodurch die Kontraste herabgesetzt werden. Dieses mehrfach reflektierte Licht wird als Streulicht bezeichnet und ist vom diffusen Streulicht zu unterscheiden. Das Streulicht läßt sich für den Einfallswinkel Null berechnen, indem man die Reflexion unter Berücksichtigung von Mehrfachreflexionen

$$R_2 = \frac{m\varrho}{1 + (m-1)\varrho}$$

von R_1 abzieht (2). Ähnlich wie die Reflexionsverluste nimmt auch das Streulicht mit der Brechzahl des Glases und mit der Anzahl der reflektierenden Flächen zu. Es ist deshalb für die optische Industrie außerordentlich wichtig, die Reflexion an Grenzflächen zu beseitigen, oder wenigstens zu vermindern.

Im folgenden soll zusammenfassend über die Verfahren zur Reflexionsverminderung berichtet werden.

Theorien der Reflexionsverminderung

Aus der Fresnelschen Formel $\varrho = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$ ersieht man, daß die Reflexion an einer Grenzfläche um so kleiner ist, je weniger sich die Brechzahlen der angrenzenden Stoffe unterscheiden (1 = Brechzahl der Luft). Bei gegebenen Brechzahlen ist auf direktem Wege eine Reflexionsverminderung nicht möglich. Ganz anders ist es, wenn wir zwischen die beiden Körper eine oder mehrere Schichten einschalten. Hier müssen wir verschiedene Fälle unterscheiden:

1. Dicke homogene Schichten.
2. Dicke inhomogene Schichten.
3. Dünne homogene Schichten.
4. Dünne inhomogene Schichten.
5. Mehrfachschichten.

Wir wollen die einzelnen Fälle der Reihe nach behandeln.

1. Dicke homogene Schichten. Unter einer dicken Schicht wird eine solche verstanden, bei der die an beiden Seiten der Schicht reflektierten Lichtanteile keine Interferenz zeigen. Wann das der Fall ist, richtet sich nicht nur nach der Dicke der Schicht, sondern auch nach der spektralen Reinheit und Wellenlänge des Lichtes. Für weißes Licht ist z. B. eine Schicht von einer Dicke über 1 μ bereits als dick zu bezeichnen.

Für die Gesamtreflexion ergibt sich als Summe der an beiden Grenzflächen reflektierten Intensitäten:

$$\varrho = \varrho_1 + \varrho_2 \frac{(1-\varrho_1)^2}{1-\varrho_1\varrho_2},$$

wobei

$$\varrho_1 = \left(\frac{n_s - 1}{n_s + 1}\right)^2, \qquad \varrho_2 = \left(\frac{n - n_s}{n + n_s}\right)^2,$$

wobei n = Brechzahl des Glases und n_s = Brechzahl der Schicht ist (Fig. 1). Den Faktor am ϱ_2

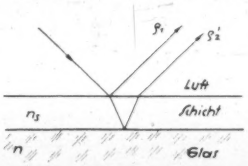


Fig. 1. Reflexion an einer Glasfläche mit einer Schicht.

kann man mit guter Näherung eins setzen. Es ergibt sich für das Reflexionsminimum die Bedingung

$$n_s = \sqrt{n},$$

d. h. die Brechzahl der Schicht soll gleich der Wurzel aus der Brechzahl des Glases sein. Man kann durch Überziehen einer Glasfläche mit einer dicken homogenen Schicht die Reflexion im günstigsten Fall auf die Hälfte herabsetzen, wie man aus der Fig. 2 ersieht.

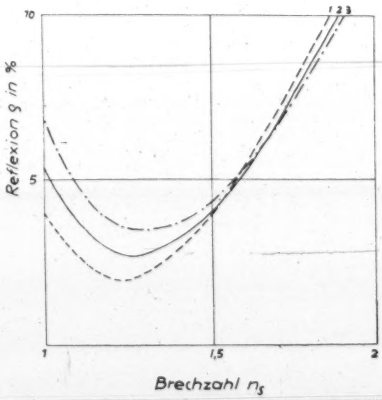


Fig. 2. Reflexionsverlauf an einer Glasfläche in Abhängigkeit von der Brechzahl einer dicken homogenen Schicht.
Kurve 1 für $n = 1{,}5$, 2 für $n = 1{,}6$ und 3 für $n = 1{,}7$.

2. Dicke inhomogene Schichten. Unter einer inhomogenen Schicht versteht man eine solche mit stetig veränderlicher Brechzahl. Bezeichnen wir entsprechend der Fig. 3 die Brechzahl der Schicht an der Glasseite mit n_2 und an der Luftseite mit n_1, so berechnet sich die Gesamtreflexion genau wie im Fall 1, nur muß man hier für

$$\varrho_1 = \left(\frac{n_1 - 1}{n_1 + 1}\right)^2 \quad \text{und} \quad \varrho_2 = \left(\frac{n - n_2}{n + n_2}\right)^2$$

einsetzen.

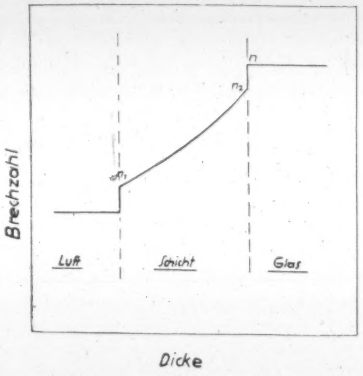


Fig. 3. Brechzahlverlauf in einer inhomogenen Schicht.

Die Reflexion verschwindet, wenn die Unstetigkeit der Brechzahl an beiden Grenzflächen auch verschwindet, d. h. wenn die Brechzahlen ohne Sprung ineinander übergehen. Der kontinuierliche Übergang muß aber innerhalb einer Schichtdicke vor sich gehen, die mindestens so groß ist, wie die Wellenlänge des Lichtes ist (3).

In den beiden bisher behandelten Fällen ist die Reflexionsverminderung bzw. Auslöschung von der Wellenlänge des Lichtes und von der Dicke der Schicht unabhängig, wenn man von der Dispersion absieht.

3. Dünne homogene Schichten. Bei dünnen Schichten muß man berücksichtigen, daß die an beiden Grenzflächen reflektierten Lichtanteile miteinander interferieren. Unter der Vernachlässigung von Mehrfachreflexionen ergibt sich für die Gesamtreflexion

$$\varrho = A^2 + B^2 + 2AB\cos\frac{2\pi 2 n_s d_s \cos\beta}{\lambda},$$

wobei $A = \frac{n_s - 1}{n_s + 1}$, $B = \frac{n - n_s}{n + n_s}$, $n_s d_s$ = optische Dicke der Schicht und $\cos\beta$ = Brechungswinkel der Schicht ist. Der Verlauf der Reflexion in Abhängigkeit von der Brechzahl der Schicht ist in Fig. 4 dargestellt. Eine völlige Reflexionsauslöschung tritt ein, wenn $A = B$ und $\cos\frac{2\pi 2 n_s d_s \cos\beta}{\lambda} = -1$ ist. Daraus ergeben sich zwei Bedingungen:

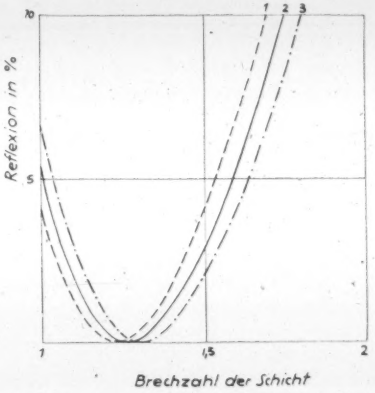


Fig. 4. Reflexionsverlauf an einer Glasfläche in Abhängigkeit von der Brechzahl einer dünnen homogenen Schicht.
Kurve 1 für $n = 1{,}5$, 2 für $n = 1{,}6$ und 3 für $n = 1{,}7$.

$$n_s = \sqrt{n}$$

und

$$d_s = \frac{\lambda\,(2m + 1)}{4\sqrt{n_s^2 - \sin^2\alpha}}, \quad m = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

die als Amplituden- und Phasenbedingung bezeichnet werden. Unter Berücksichtigung der Mehrfachreflexionen ist nach Bauer (4) und Schröder (5)

$$\varrho = \frac{n_s^2 (n_s - 1)^2 - (n^2 - n_s^2)(n_s^2 - 1)\sin^2\frac{2\pi n_s d_s}{\lambda}}{n_s^2 (n_s + 1)^2 - (n^2 - n_s^2)(n_s^2 - 1)\sin^2\frac{2\pi n_s d_s}{\lambda}}.$$

Die Extremwerte für ϱ ergeben sich zu

$$\varrho' = \left(\frac{n - 1}{n + 1}\right)^2, \text{ wenn } n_s d_s = \frac{(2m + 2)\lambda}{4},$$
$$m = 0, 1, 2, \ldots$$

und

$$\varrho'' = \left(\frac{n_s^2 - n}{n_s^2 + n}\right)^2, \text{ wenn } n_s d_s = \frac{(2m + 1)\lambda}{4},$$
$$m = 0, 1, 2, \ldots \text{ ist.}$$

Ob ϱ' bzw. ϱ'' Maximum oder Minimum ist, hängt von den Absolutwerten von n_s und n ab, wie das aus der Tabelle I ersichtlich ist.

Tabelle I

	$n_s < n$	$n_s > n$
ϱ_{max}	$\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$	$\left(\frac{n_s^2-n}{n_s^2+n}\right)^2$
ϱ_{min}	$\left(\frac{n_s^2-n}{n_s^2+n}\right)^2$	$\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$

Ist die Brechzahl der Schicht n_s kleiner als die Brechzahl des Glases n, so ist ϱ' ein Maximum und ϱ'' ein Minimum. Ist n_s größer als n, so ist umgekehrt ϱ'' ein Maximum und ϱ' ein Minimum. Interessant ist es, daß ϱ' von n_s unabhängig ist, d. h. für gerade Vielfache von $\frac{\lambda}{4}$ verhält sich die Gesamtreflexion an zwei Grenzflächen so, als ob die Schicht mit der Brechzahl n_s nicht vorhanden wäre.

Es kann sowohl ϱ' wie ϱ'' auch Null werden. $\varrho' = 0$, wenn $n = 1$, d. h. wenn eine dünne Schicht auf beiden Seiten von Luft umschlossen ist. Das ist der Fall z. B. bei einer Seifenblase, oder bei einer Glasplatte, die auf beiden Seiten von Luft umschlossen ist.

$\varrho'' = 0$, wenn $n_s^2 = n$ ist. Dieser Fall tritt ein, wenn zwischen die beiden Körper mit den Brechzahlen 1 und n eine Schicht mit der Brechzahl n_s gelegt wird, also z. B. wenn eine Glasplatte mit einer dünnen Schicht versehen wird. Dieser Fall ist für die praktische Optik außerordentlich wichtig. Man kann durch Überziehen einer Glasplatte mit einer dünnen Schicht, deren Brechzahl gleich der Quadratwurzel aus der Brechzahl des Glases und deren Dicke $\frac{\lambda}{4}$ oder ein ungerades Vielfaches davon ist, die Reflexion an einer Glasplatte restlos beseitigen. Das ist allerdings möglich nur für eine einzige Wellenlänge. Für mehrere Wellenlängen gleichzeitig kann man die Reflexion nur vermindern, und zwar um so weniger, je breiter das Wellenlängengebiet ist.

4. Dünne inhomogene Schicht, mit einem unstetigen Übergang an den Grenzflächen. Bei einer dünnen inhomogenen Schicht wird die Reflexion durch folgende Formel wiedergegeben (4, 5)

$$\varrho = \frac{(n n_1 - n_2)^2 - (n^2 - n_2^2)(n_1^2 - 1)\sin^2\frac{\Delta_s}{2}}{(n n_1 + n_2)^2 - (n^2 - n_2^2)(n_1^2 - 1)\sin^2\frac{\Delta_s}{2}},$$

wobei

$$\Delta_s = \frac{4\pi}{\lambda}\int_0^{2\pi} n(x)\,dx \quad \text{ist.}$$

Die Extremwerte von ϱ ergeben sich zu

$$\varrho' = \left(\frac{n n_1 - n_2}{n n_1 + n_2}\right)^2 \quad \text{und} \quad \varrho'' = \left(\frac{n - n_1 n_2}{n + n_1 n_2}\right)^2.$$

Ähnlich wie bei den homogenen Schichten können auch hier sowohl ϱ' wie ϱ'' ein Maximum bzw. ein Minimum werden, je nach den Absolutwerten von n, n_1 und n_2.

Der Unterschied zwischen den homogenen und inhomogenen Schichten besteht nur im folgenden. Bei homogenen Schichten konnte ϱ' Null nur dann werden, wenn $n = 1$ war. Bei inhomogenen Schichten ist $\varrho' = 0$, wenn $n\,n_1 = n_2$ ist, d. h. n_1 kann von 1 verschieden sein. ϱ'' ist Null, wenn $n_3 = n_1 n_2$ ist.

Bei inhomogenen Schichten haben wir demnach auch dann zwei Möglichkeiten, um die Reflexion zum Verschwinden zu bringen, wenn n nicht gleich 1 ist. Bei einer Glasoberfläche, die mit einer inhomogenen an Luft angrenzenden Schicht versehen ist, verschwindet die Reflexion, wenn $n = \frac{n_2}{n_1}$ oder wenn $n = n_1 n_2$ ist. Der erste Fall tritt ein für gerade Vielfache von $\frac{\lambda}{4}$, wenn n_2 größer als n ist. Der zweite Fall liegt vor bei ungeraden Vielfachen von $\frac{\lambda}{4}$, wenn n_2 kleiner als n ist. Im ersten Fall sind die Schichten stark inhomogen, im zweiten nur wenig inhomogen.

5a) Dicke homogene Mehrfachschichten. An Stelle einer Schicht kann man zur Reflexionsverminderung auch zwei oder mehr Schichten nehmen. Die Brechzahlen der einzelnen Schichten müssen dann zwischen den Brechzahlen der benachbarten Schichten liegen. Man kann dadurch die Reflexion noch weiter herabsetzen, als nur mit einer Schicht. Je mehr Schichten vorhanden sind, um so mehr nähert man sich dem Fall mit kontinuierlich veränderlichen Brechzahlen. Praktisch haben Mehrfachschichten keine Bedeutung, da die einzelnen Schichten Brechzahlen haben müssen, die man mit festen Stoffen kaum erreichen kann.

5b) Dünne homogene Mehrfachschichten (6). Bei zwei Schichten mit den Brechzahlen n_1 und n_2 setzt sich die Gesamtreflexion aus drei Amplitudenkomponenten zusammen, die vektoriell addiert werden.

$$\varrho = (\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3)^2$$

oder skalar geschrieben:

$$\varrho = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + 2A_1A_2\cos\frac{2\pi 2n_1d_1}{\lambda} + 2A_2A_3\cos\frac{2\pi 2n_2d_2}{\lambda} + 2A_1A_3\cos\frac{2\pi 2(n_1d_1 + n_2d_2)}{\lambda}$$

Die Reflexion verschwindet, wenn die drei Amplituden ein geschlossenes Dreieck bilden, wenn

$$A_3^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos\frac{2\pi 2n_1d_1}{\lambda}$$

ist.

Durch geeignete Wahl der Phasen läßt sich das immer erreichen. Ähnlich kann man an Stelle von zwei auch drei und mehr Schichten verwenden.

Eigenschaften der Schichten. Für die Praxis haben dicke homogene wie inhomogene Schichten keine Bedeutung, da man mit homogenen Schichten die Reflexion nur auf die Hälfte herabsetzen kann und bei inhomogenen Schichten an der Luftseite so kleine Brechzahlen verlangt werden, daß die Schichten nicht haltbar gemacht werden können. Praktische Bedeutung haben bisher dünne homogene Schichten bzw. schwachinhomogene gefunden.

Aus der Amplitudenbedingung ergibt sich, daß für optische Gläser mit den Brechzahlen 1,5–1,7 die Brechzahl der homogenen Schichten 1,2–1,3 betragen muß. Da alle bisher bekannten Stoffe, die für die Herstellung solcher Schichten in Frage kommen, wesentlich höhere Brechzahlen haben, muß man entweder poröse Schichten herstellen oder sich mit einer Verminderung der Reflexion statt einer vollkommenen Beseitigung zufrieden geben. Je größer aber die Porosität, um so kleiner ist die Widerstandsfähigkeit der Schichten, die für die praktische Anwendung ausschlaggebend ist. Man kann demnach große Reflexionsverminderung bei kleiner Widerstandsfähigkeit oder umgekehrt erreichen. Nur bei Gläsern mit möglichst hohen Brechzahlen kann man beides zugleich erreichen.

Bei homogenen Schichten läßt sich die Brechzahl n_s aus der Gleichung $\varrho'' = \left(\frac{n - n_s^2}{n + n_s^2}\right)^2$ bei bekanntem ϱ'' und n berechnen. Aus der Gleichung für die Molrefraktion ergibt sich die Dichte der Schicht. Als Maß für die Porosität p kann man

$$p = \frac{s_0 - s}{s_0}$$

angeben, wobei s_0 = Dichte des kompakten Materials und s = Dichte der Schicht ist.

Eine andere Methode zur Bestimmung der Porosität beruht auf der Wägung der Schicht bei bekannter optischer Dicke ($n_s d_s$). Man kann durch die Wägung $\frac{s}{n_s}$ ermitteln. Andererseits ist aus der Molrefraktion $sr = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$ eine zweite Beziehung zwischen s und n bekannt. Aus beiden Gleichungen läßt sich sowohl s wie n_s berechnen.

Bei inhomogenen Schichten lassen sich aus der Bestimmung der Reflexion im Maximum und Minimum nur die Brechzahlen an der äußeren und an der inneren Grenze bestimmen. Über den Verlauf der Brechzahl innerhalb der Schicht läßt sich nichts aussagen.

Während bei einer Schicht die Brechzahl 1,2–1,3 betragen muß, können die Brechzahlen bei Mehrfachschichten größer als die der Gläser sein. Man hat dadurch eine viel größere Auswahl in den Stoffen, aus denen die Schichten hergestellt werden.

Herstellung der Schichten. Zur Herstellung von reflexmindernden Schichten haben wir zwei Verfahren:

1. das subtraktive (chemische) Verfahren und
2. das addjtive (physikalische) Verfahren.

Das subtraktive Verfahren beruht darauf, daß aus dem Glas hochbrechende Bestandteile durch Säuren herausgelöst werden, so daß auf der Glasoberfläche eine niedriger brechende Schicht zurückbleibt. Nach diesem Verfahren lassen sich sehr widerstandsfähige Schichten herstellen. Dieses Verfahren ist aber nur auf eine beschränkte Anzahl von Gläsern anwendbar.

Beim additiven Verfahren werden auf Glasoberflächen fremde Schichten aufgetragen, deren Dicke und Brechzahl je nach der Art der Schicht und der Glassorte angepaßt werden müssen. Am einfachsten werden diese Schichten durch Verdampfen im Hochvakuum hergestellt.

Anwendungen: Durch die Reflexionsverminderung haben wir die Möglichkeit, die Lichtstärke von optischen Geräten unter Umständen wesentlich zu erhöhen. Eine Erhöhung der Lichtstärke ist vor allem dann von Vorteil, wenn die Beleuchtungsstärke die untere Grenze erreicht. Das ist der Fall bei allen optischen Instrumenten, die in der Dämmerung benutzt werden. Hier nimmt die Sehschärfe des Auges mit der Beleuchtungsstärke viel stärker zu als beim Tageslicht. Bei photographischen Objektiven ist die Erhöhung der Lichtstärke bei Aufnahme von beweglichen Objekten

wichtig, da man die Belichtungszeit verkürzen und dadurch das Auflösungsvermögen erhöhen kann.

Ein zweiter Vorteil der Reflexionsverminderung liegt in der Herabsetzung des Streulichtes, wodurch die besonders in der Photographie störenden Reflexe beseitigt und die Bildkontraste erhöht werden. Die nachstehende Tabelle soll die Erhöhung der Lichtstärke und die Verminderung des Streulichtes veranschaulichen.

Tabelle II

1.	Anzahl der Flächen	2	10	20	30
2.	Durchlässigkeit bei $\varrho = 5$ Proz.	90,2	59,8	35,8	21,5
3.	Durchlässigkeit bei $\varrho = 1$ Proz	98,0	90,4	81,6	73,8
4.	Streulicht bei $\varrho = 5$ Proz.	0,3	5,8	13,0	17,3
5.	Streulicht bei $\varrho = 1$ Proz.	0,2	0,5	1,7	3,0

Die Zeilen 2 und 4 geben die Durchlässigkeit und das Streulicht an bei $\varrho = 5$ Proz., was im Durchschnitt bei den Gläsern angenommen werden kann, und die Zeilen 3 und 5 die entsprechenden Werte bei auf 1 Proz. verminderter Reflexion. Die Unterschiede sind beträchtlich.

Zusammenfassung

Durch die Einführung eines Zwischenkörpers zwischen Glas und Luft läßt sich die Reflexion vermindern. Bei großen Dicken eines homogenen Zwischenkörpers läßt sich die Reflexion durch geeignete Wahl der Brechzahl etwa auf die Hälfte herabsetzen. Bei kleinen, mit der Lichtwellenlänge vergleichbaren Dicken kann man die Reflexion für einzelne Wellenlängen restlos beseitigen, wenn

$$n_s = \sqrt{n}$$

und

$$n_s d_s = \frac{\lambda}{4}(2m + 1),$$

wobei $m = 0, 1, 2, \ldots$ ist. Bei einem inhomogenen Zwischenkörper großer Dicke kann die Reflexion nur dann verschwinden, wenn an den Grenzflächen sich die Brechzahl stetig und langsam mit der Wellenlänge ändert. Bei inhomogenen dünnen Zwischenkörpern hat man zwei Möglichkeiten, die Reflexion für einzelne Wellenlängen zum Verschwinden zu bringen, wenn

$$n = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{oder} \quad n = n_1 n_2$$

ist, wobei

n_1 bzw. n_2 = Brechzahl des Zwischenkörpers an der Glasseite bzw. an der Luftseite ist.

Bei Mehrfachschichten ist die Reflexion Null, wenn die Summe der Lichtvektoren ein geschlossenes Vieleck bildet.

Durch die Reflexionsverminderung werden die Lichtstärke und die Kontraste von optischen Geräten erhöht.

Literaturverzeichnis

1) Siehe auch A. Smakula, Glastechn. Ber. **19**, 377, 1941.
2) F. Jentzsch, Kinotechnik **23**, 140, 1941.
3) N. J. Meysing, Physica **8**, 687, 1941.
4) E. Bauer, Ann. d. Phys. **19**, 434, 1934.
5) H. Schröder, Ann. d. Phys. **39**, 55, 1941.
6) C. H. Cartwright und F. A. Turner, Bull. Amer. Phys. Soc. **14**, 8, 1939.
Weitere Literatur siehe unter 1).

Jena, den 20. Februar 1942.

(Eingegangen 19. März 1942)

Einschwingvorgang und Stoßaufzeichnung[1])

Von H. Martin

Mit Tafel XVII

1. Einleitung

Sehr ausführlich ist von W. Schneider[2]) die Frage erörtert worden, welche Eigenschwingung eine Membran haben muß, um den Explosionsdruck in unmittelbarer Nähe einer Sprengstelle bestimmen zu können.

Auch in der Seismik spielt die Frage der Stoßaufzeichnung eine Rolle[3]). Wie sich eine nicht rein sinusförmige Erdbebenbewegung im Seismogramm auswirkt, zeigt Fig. 1. Es handelt sich um die Aufzeichnungen der beiden Beben vom 26. und 27. Dezember 1941, wie ich sie mit

1) Vortrag von der Tagung des Gauvereins Thüringen-Sachsen-Schlesien der Deutschen Physikalischen Gesellschaft am 24. und 25. Januar 1942 in Jena.

2) W. Schneider, Untersuchungen zur Bestimmung des Druckes in den beim Sprengen und Schießen entstehenden Luftstoßwellen. Zeitschr. f. d. gesamte Schieß- u. Sprengwesen **34**, 230, 263, 284, 304 und 329, 1939.

3) H. Martin, Einschwingvorgänge und ihre Bedeutung bei der Aufzeichnung stoßähnlicher Erschütterungen. Veröffentl. d. Reichsanstalt f. Erdbebenforschung, H. 26, Leipzig 1935 (mit Schrifttumsnachweis). — M. Toperczer, Beitrag zur theoretischen Behandlung des Erdbebenstoßes. Sitzungsber. d. Akad. d. Wissenschaften in Wien, Bd. 148, 1939, 32 Seiten (mit Schrifttumsnachweis).

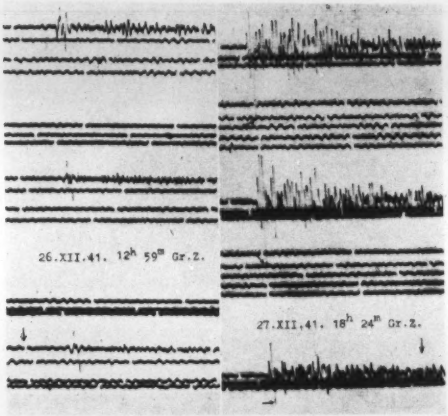


Fig. 1. Gleichzeitige Aufzeichnung eines Erdbebens durch drei elektrodynamische Seismometer mit Minutenmarken.

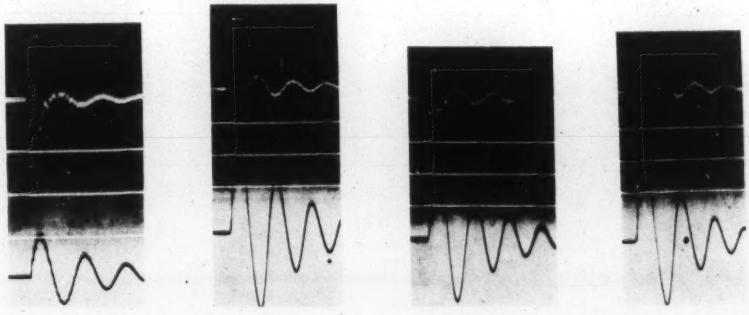


Fig. 5a. Fig. 5b. Fig. 5c. Fig. 5d.

Fig. 5a—d. Experimentelle Beschleunigungs- und Schwingwegkurven. Eigenschwingungsdauer des Schütteltisches 0,2 Sek.

von mir angegebenen Apparaten[4]) in Jena registriert habe. Die aufgezeichneten Beben haben in einer Entfernung von cr. 8000 km bzw. cr. 2000 km stattgefunden. In Fig. 1 stellen dar[5]):

1. Kurve: Vertikale Bodenbewegung, $T_0 = 2$ Sekunden, $\alpha = 0{,}66$.
2. Kurve: Horizontale Bodenbewegung, E–W, $T_0 = 2$ Sekunden, $\alpha = 0{,}62$.
3. Kurve: Horizontale Bodenbewegung, E–W, $T_0 = 10$ Sekunden, $\alpha = 0{,}53$.

Nach der Theorie müßten die Aufzeichnungen der beiden Horizontalseismometer hinsichtlich der Schwingweiten bei den schnellen Schwingungen weitgehend gleich sein. Daß dies nicht der Fall ist, deutet, wie wir sehen werden, auf stoßähnliche Vorgänge hin.

2. Theorie

Von einer Funktion, die eine stoßähnliche Bewegung hinreichend genau wiedergeben soll, ist zu fordern, daß zur Zeit des Stoßbeginns ($t = 0$): 1. die Bewegung, 2. die Geschwindigkeit und 3. die Beschleunigung gleich Null sein sollen.

Den angegebenen Bedingungen genügt die von mir[3]) angegebene Funktion

$$x = \sin\tau - \tfrac{1}{3}\sin 3\tau . \qquad (1)$$

Darin bedeutet τ den dimensionslosen Zeitmaßstab, der definiert ist durch

$$\tau = \frac{2\pi}{T_0}\cdot t , \qquad (2)$$

wobei T_0 die ungedämpfte Schwingungsdauer des zur Stoßaufzeichnung verwendeten Meßinstrumentes ist.

Man kann Gleichung (1) erweitern und hat in der Form

$$x = C\cdot e^{-\alpha_1\tau}\left(\sin\tau - \frac{1}{n}\cdot\sin n\tau\right) \qquad (3)$$

eine Funktion, die zur Darstellung solcher stoßähnlicher Bewegungen geeignet ist, bei denen man die beiden ersten Beschleunigungsmaxima hinsichtlich ihres Größenverhältnisses variieren kann.

W. Schneider[2]) fand, daß er die von ihm registrierten Explosionsdruckkurven darstellen konnte durch den Ausdruck

$$p = e^{-0{,}5\cdot\gamma_1\cdot\tau}\cdot\cos\gamma_1\tau - e^{-8\cdot\gamma_1\cdot\tau}\cdot\cos 10\gamma_1\tau . \qquad (3a)$$

Die Funktion p genügt vom Standpunkt einer stoßähnlichen Bewegung aus betrachtet nur der Bedingung 1.

Von Toperczer[3]) ist die Funktion

$$x = C\cdot\tau^2\cdot e^{-\alpha_1\tau}\cdot\sin\varkappa\tau \qquad (4)$$

behandelt worden. Sie erfüllt zwar die angegebenen Bedingungen 1–3, läßt aber nur Betrachtungen spezieller Fälle zu. Außerdem verlangt Gleichung (4) noch eine Beziehung zwischen α_1 und $\varkappa$.

Nun gibt aber schon die Funktion

$$x = C\cdot\tau^n\cdot e^{-\alpha_1\tau} \qquad (5)$$

die Möglichkeit der Darstellung einer stoßähnlichen Bewegung. Da man drei Veränderliche (C, n und α_1) zur Verfügung hat, kann man praktisch jeden stoßähnlichen Verlauf hinreichend genau mit Gleichung (5) wiedergeben. Damit die drei Anfangsbedingungen erfüllt werden, muß

$$n > 2 \qquad (6)$$

sein.

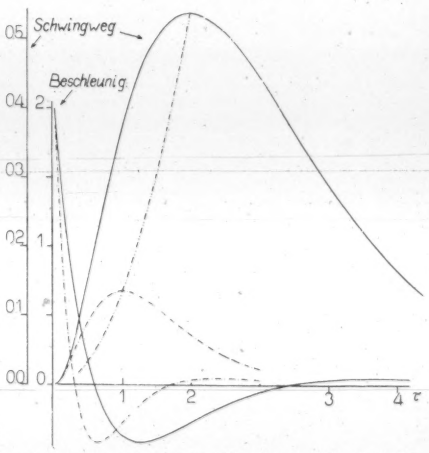


Fig. 2. Darstellung der Kurven $x = C\cdot\tau^2\cdot e^{-\alpha_1\tau}$ und $\ddot{x} = C\cdot e^{-\alpha_1\tau}(2 - 4\alpha_1\tau + \alpha_1^2\cdot\tau^2)$ mit $C = 1$ und $\alpha_1 = 1$ bzw. 2.

Der charakteristische Verlauf dieser Funktionen soll allerdings zunächst an der Funktion

$$x = C\cdot\tau^2\cdot e^{-\alpha_1\tau} \qquad (7)$$

gezeigt werden. In Fig. 2 sind die stoßähnlichen Bewegungen (7) für $C = 1$ und $\alpha_1 = 1$ bzw. 2 (– mit Schwingweg bezeichnet, weil ein Schwingwegmesser diese Aufzeichnung liefern würde –) mit den zugehörigen Beschleunigungskurven

4) Empfindlichkeit und Frequenzcharakteristiken eines neuen elektrodynamischen Erschütterungsmessers. Physik. Zeitschr. **40**, 577–582, 1939.

5) Die drei Galvanometer hatten eine Schwingungsdauer von 1,8 Sekunden und waren durch Nebenschluß aperiodisch eingestellt.

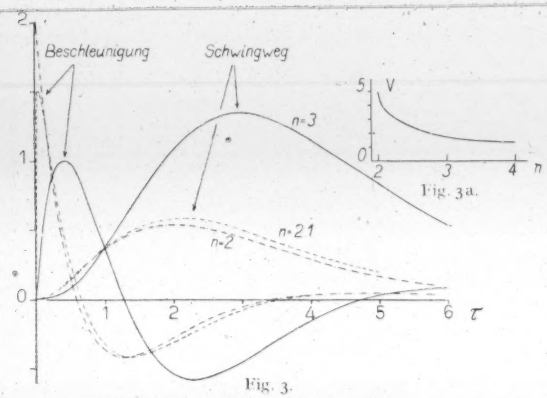
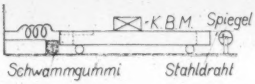


Fig. 3.

Fig. 3. Schwingweg und Beschleunigungsverlauf der Funktion $x = C \cdot \tau^n \cdot e^{-\alpha_1 \tau}$ für $n = 2,\ 2{,}1$ und 3.

Fig. 3a.

Fig. 3a. Verhältnis V der beiden ersten Beschleunigungsmaxima in Abhängigkeit von n.



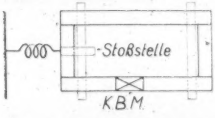


Fig. 4. Versuchsanordnung. Mit Hilfe des durch den Stahldraht bewegten Spiegels wurde die Bewegung des Schütteltisches registriert.

wiedergegeben. Dabei ist besonders auf die ganz gleichen Amplituden der Beschleunigungskurven bei ganz verschiedenen Weiten der Schwingwegkurven hinzuweisen, deren Maximum allgemein durch

$$n = \alpha_1 \cdot \tau_m \tag{8}$$

im vorliegenden Falle durch

$$2 = \alpha_1 \cdot \tau_m \tag{8a}$$

zu ermitteln ist.

Die Beschleunigung hat für die Kurven (5) bei $\tau = 0$ für $n \leq 2$ eine Sprungstelle, weshalb die Forderung (6) aufgestellt worden ist.

In Fig. 3 sind neben der Kurve $x = C \cdot \tau^2 \cdot e^{-\alpha_1 \tau}$ die Kurven $x = C \cdot \tau^{2,1} \cdot e^{-\alpha_1 \tau}$ und $x = C \cdot \tau^3 \cdot e^{-\alpha_1 \tau}$ mit $\alpha_1 = 1$ gezeichnet worden. Die Beschleunigungskurve für $n = 2{,}1$ und $n = 3$ geht durch den Nullpunkt. Die Krümmung am Anfang der Bewegung und die Maximalamplitude der Schwingwegkurve sind in starkem Maße von n abhängig. Die Maximalbeschleunigung nimmt mit wachsendem n ab.

In Fig. 3a ist noch das Verhältnis V der beiden ersten Beschleunigungsmaxima in Abhängigkeit von n aufgetragen. Daraus kann man entnehmen, daß man praktisch bestenfalls etwa das Verhältnis $V = 4$ erreichen kann.

Nicht unwesentlich ist es, darauf hinzuweisen, daß, wie aus Fig. 3 hervorgeht, im Anfang der Stoßbewegung Bewegung und Beschleunigung dieselbe Richtung haben.

3. Die Versuchsanordnung

Die theoretischen Kurven in Abb. 3 wurden mit der folgenden Versuchsanordnung geprüft: Auf einem Schütteltisch, der aus einem auf zwei Rollen ruhenden Balkenviereck (Fig. 4a) bestand, befand sich ein Kohledruckbeschleunigungsmesser KBM., der in einer Wheatstonschen Brückenschaltung lag. Die Stromschwankungen wurden mit einem Zeißschen Schleifengalvanometer registriert. Der Schütteltisch wurde einseitig mit einer Feder leicht an eine Lage Schwammgummi gepreßt. Die Tischbewegung wurde gleichzeitig mit der Beschleunigungskurve aufgenommen. Der Anstoß erfolgte an der in Fig. 4b bezeichneten Stelle. Dazu wurde ein an einem Stahldraht hängendes Gewicht benutzt, wobei zur Regulierung der „Härte" des Stoßes das Gewicht

a) direkt,
b) unter Zwischenschaltung einer 4fachen Papierlage,
c) unter Zwischenschaltung eines Radiergummis

an den Holzrahmen stieß.

4. Die experimentellen Ergebnisse

Im Falle a) haben wir es mit einem sehr harten Anstoß zu tun. Es tritt dabei, wie aus Fig. 5a ersichtlich ist, eine schnelle Schwingung auf. Trotzdem ist das Verhältnis V der beiden ersten Beschleunigungsmaxima 2,3, obwohl sich

infolge der störenden Oberschwingung die Tisch- und Beschleunigungskurve nicht sauber ausbilden können.

Im Falle b) ist die störende Oberschwingung noch angedeutet. Nach Fig. 5b erhalten wir für V den Wert 2,6, nach Fig. 5c den Wert 2,9.

Im Falle c) haben wir es mit einem weichen Stoß zu tun. Die störende Oberschwingung ist fast ganz verschwunden. In Fig. 5d lesen wir für V den Wert 1,8 ab. Die Krümmung der Tischbewegungskurve ist größer als in den beiden vorhergehenden Fällen.

Diese Versuche, die nur qualitativ zu werten sind, zeigen, daß sich bei einer Änderung der Stoßbedingungen auch die Beschleunigungswerte sehr deutlich ändern und daß somit der Bewegungsvorgang mit Hilfe von Gleichung (5) darstellbar ist.

Es geht aber aus Fig. 5 der wichtige Hinweis hervor, daß man es nur so lange mit einer Stoßbewegung zu tun hat, bis das schwingungsfähige System etwa seine größte Amplitude hat. Dann klingt es in freier Schwingung ab. Wir haben also kurz vor Erreichen der maximalen Tischbewegung (nach dem zweiten Beschleunigungsmaximum) die Eigenschwingung aus den in diesem Zeitpunkt herrschenden Grenzbedingungen abzuleiten.

Somit ergibt sich aus Theorie und Experiment:

1. Man kann eine stoßähnliche Bewegung hinreichend genau durch die Funktion

$$x = C \cdot \tau^n \cdot e^{-\alpha_1 \tau} \text{ mit } n > 2$$

darstellen.

2. Die Beschleunigung ist in der Richtung der Stoßbewegung immer größer und abhängig vom Faktor n. Das zweite Beschleunigungsmaximum liegt vor der Maximalamplitude der Stoßbewegung.
3. Zur Beurteilung und Charakterisierung einer Stoßbewegung ist die Kenntnis des Beschleunigungsverlaufes unbedingt erforderlich, worauf ich schon 1935 aufmerksam gemacht habe[3]). Mit Rücksicht auf das seismische Schrifttum weise ich auf diese Forderung nochmals besonders hin.

5. Folgerungen für die Praxis

Wir wollen die Frage beantworten:

Welche Schwingungsdauer müssen ein Schwingweg- und ein Beschleunigungsmesser haben, um eine einwandfreie Aufzeichnung des Stoßverlaufes (Schwingweges) und der Beschleunigungswerte zu liefern?

Als Stoßbewegung legen wir die Beziehung (5) mit $n = 3$, also

$$x = C \cdot \tau^3 \cdot e^{-\alpha_1 \tau}, \tag{5a}$$

zugrunde. Somit lautet die zu lösende Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + 2\alpha \cdot \frac{d\xi}{d\tau} + \xi = -\frac{d^2x}{d\tau} = C \cdot e^{-\alpha_1 \tau}[-6\tau + 6\alpha_1\tau^2 - \alpha_1^2\tau^3] \,. \tag{9}$$

Als Lösung ist anzusetzen:

$$\xi = e^{-\alpha_1 \tau}[C_1 + C_2 \cdot \tau + C_3 \cdot \tau^2 + C_4 \cdot \tau^3] - C_5 \cdot e^{-\alpha\tau} \cdot \sin(\beta\tau + q) \tag{10}$$

mit den Grenzbedingungen

$$\tau = 0\,, \quad \xi = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d\xi}{d\tau} + \frac{dx}{d\tau} = 0\,. \tag{11}$$

Dabei bedeutet $\beta = \sqrt{1 - \alpha^2}$.

Damit erhalten wir für die Konstanten C_1 bis C_5 die Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
C_2 &= \frac{12 \cdot C}{U^4}\left[2\alpha_1(\alpha_1^2 - 1) - \alpha(\alpha_1^4 - 1)\right] \\
C_2 &= \frac{6C}{U^3}\left[3\alpha_1^2 - 2\alpha\alpha_1^3 - 1\right] \\
C_3 &= \frac{6C \cdot \alpha_1}{U^2}(1 - \alpha\alpha_1) \\
C_4 &= -\frac{C \cdot \alpha_1^2}{U} \\
C_5 &= \frac{1}{\beta}\sqrt{C_1^2 \cdot U + 2C_1C_2(\alpha - \alpha_1) + C_2^2}
\end{aligned}\right| \tag{12}$$

mit $U = \alpha_1^2 - 2\alpha\alpha_1 + 1$,

$$\operatorname{tg} q = \frac{C_1 \cdot \beta}{C_1(\alpha - \alpha_1) + C_2}\,, \quad \sin q = \frac{C_1}{C_5}\,. \tag{13}$$

Wenn die aufgezeichnete Schwingwegkurve mit der erregenden Stoßbewegung übereinstimmen soll, muß $C_4 = -C$ sein. Das ergibt, daß $\alpha_1^2 = U$ und $\alpha_1^2 \gg 1$ sein muß. Die Dämpfung α spielt eine untergeordnete Rolle. Wählen wir deshalb $\alpha_1 = 10$, so erhalten wir aus Gleichung (8) für die Zeit des Maximums der Stoßbewegung

$$\tau_m = \frac{3}{10}\,. \tag{14}$$

Nach Gleichung (2) ist aber

$$\tau_m = \frac{2\pi}{T_0} \cdot t_m\,. \tag{2a}$$

Wenn wir $t_m = \frac{T_0}{4 \cdot x}$ schreiben, dann erhalten wir aus den Gleichungen (2a) und (8b) für $x = 5$,

d. h. die Schwingungsdauer des Schwingwegmessers muß 5mal so groß als die Schwingungsdauer der Stoßbewegung oder 20mal so groß wie die Zeit bis zur Erreichung des Maximums der Stoßbewegung sein.

Die übrigen Konstanten sind alle kleiner als 1 Proz. C, so daß die Stoßbewegung mit der Aufzeichnung des Schwingwegmessers für praktische Messungen vollkommen identisch ist. Das gilt somit auch für jede andere entsprechend schnelle Bewegung, wofür Fig. 6 ein weiteres Beispiel sein möge. Trotzdem ich auf diese Tatsache schon wiederholt hingewiesen[6]) habe, wäre es nun an der Zeit, daß aus dem seismischen Schrifttum der immer wiederkehrende Satz

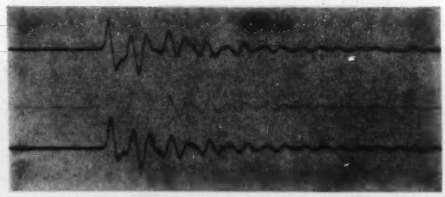


Fig. 6. Aufzeichnung (3,7 cm = 1 Sekunde) einer nicht sinusförmigen Bewegung durch einen fast ungedämpften Schwingwegmesser ($T_0 = 0{,}56$ Sekunden). Kurve A: Schwingwegmesser, Kurve B: Schütteltisch.

verschwindet, daß in der Mehrzahl der Fälle die Registrierung eines Seismographen ein sehr verzerrtes Bild der wirklich stattgehabten Bewegung des Bodens darstelle.

Soll die aufgezeichnete Kurve den Beschleunigungsverlauf der erregenden Stoßbewegung getreu wiedergeben, so müssen in Gleichung (12)

$$C_2 = -C,\ C_3 = 6 \cdot \alpha_1 C,\ C_4 = -\alpha_1^2 C$$

und C_1 und C_5 möglichst klein sein. Das ergibt für U die Forderung

$$U = 1 \text{ und damit } \alpha_1^2 \ll 1$$

bei möglichst kleiner Dämpfung ($\alpha = 0$).

Wir setzen $\alpha_1 = 0{,}1$ an. Dann ergibt die gleiche eben durchgeführte Rechnung für x den Wert

$$x = 0{,}05.$$

Wir erhalten also mit einem Beschleunigungsmesser, dessen Schwingungsdauer 20mal kleiner ist als die Schwingungsdauer der Stoßbewegung ($t_m = {}^1/_4\, T_{\text{Stoßbewegung}}$), selbst wenn er ungedämpft ist, bei der angenommenen Erregung vollkommen getreu den theoretischen Beschleunigungsverlauf.

Jedoch wird man dem Beschleunigungsmesser eine möglichst hohe Dämpfung ($\alpha = 0{,}7$) geben, um die praktisch immer auftretenden Eigenschwingungen (sie sind schon wesentlich größer bei einer Erregung

$$x = C \cdot \tau^{2,1} \cdot e^{-\alpha_1 \tau})$$

auszuschalten.

Jena, Reichsanstalt für Erdbebenforschung, im Februar 1942.

(Eingegangen 19. März 1942)

6) H. Martin, Systematik der Einschwingvorgänge, I. Veröffentl. d. Reichsanstalt f. Erdbebenforschung, H. 34, Berlin 1938; s. auch Fußnote 3).

Die Zertrümmerung des Deuterons durch schnelle Neutronen

Von Erich Bagge

Mit Tafel XVIII und XIX

Zusammenfassung

Die Neutronen aus einer *Ra-Be*-Quelle von 500 mg *Ra* durchsetzen eine mit H_2 bzw. D_2 gefüllte Wilson-Kammer und es werden die Längen und Winkel der dabei auftretenden Rückstoßbahnen gegen die Einfallsrichtung bestimmt. Man erhält daraus das Energiespektrum der Neutronen im Gebiete von 0,8 – 3 MeV und die Winkelverteilungen der Rückstoßatome.

Die Kurve für die Häufigkeiten der verschiedenen Reichweiten bei D_2-Füllung unterscheidet sich von der entsprechenden für Wasserstoff durch das Erscheinen eines kleinen „Buckels" bei etwa 2,6 cm Luftäquivalent, dessen Entstehung auf Zertrümmerungsprozesse des D-Kerns zurückgeführt wird und der auf ein resonanzartiges Verhalten des Wirkungsquerschnitts für die Auslösung des Zertrümmerungsvorgangs hinweist.

Aus der Zahl der beobachteten Prozesse läßt sich der mittlere Wirkungsquerschnitt für die Zertrümmerung des Deuterons durch jene Neutronen des *Ra-Be*-Spektrums, die mehr als 3,5 MeV besitzen, abschätzen zu: $3 \cdot 10^{-25}$ cm^2. Diese Angabe ist unsicher bis auf einen Faktor der Größe $\frac{1}{2}$–2.

Die theoretisch zu erwartende Energieverteilung der Zertrümmerungsprotonen wird unter einfachen Annahmen hergeleitet und mit der experimentell gefundenen verglichen.

§ 1
Einleitung

Der Wirkungsquerschnitt für die Zertrümmerung des Deuterons durch schwere Kernteilchen ist nur für Protonen von 5,2 MeV durch Barkas und White[1]) gemessen worden.

1) W. H. Barkas und M. G. White, Phys. Rev. **56**, 288, 1939.

Für Neutronen hingegen liegen bisher keine Meßergebnisse vor.

In dieser Arbeit soll über Messungen berichtet werden, bei denen die Zerstrümmerung des Deuterons durch schnelle Neutronen $D\,(n, 2n)\,H$ in der Wilson-Kammer beobachtet wurde. Es wird sich dabei zeigen, daß der Wirkungsquerschnitt für diesen Prozeß, gemittelt über alle Neutronenenergien $> 3{,}5$ MeV des *RaBe*-Spektrums, um eine Größenordnung höher liegt als der von Barkas und White angegebene des $D\,(p, n)\,2\,H$-Prozesses.

§ 2

Die Meßmethode

Die direkte Beobachtung des Zertrümmerungsprozesses bereitet insofern gewisse Schwierigkeiten, als beim Stoß schneller Neutronen auf Deuteronen diese in der überwiegenden Zahl der Fälle elastische Rückstöße erleiden und nicht etwa in ihre Bestandteile zerlegt werden. Wenn man aber, wie das im Rahmen dieser Untersuchung geschah, die beiden Prozesse in der Wilson-Kammer beobachtet, so findet man in jedem Falle Spuren, die irgendwo im Gasraum beginnen und unter günstigen Umständen auch noch dort enden. Ihr Aussehen, sowohl bezüglich ihrer Tröpfchendichte als auch hinsichtlich ihrer Reichweite, ist dabei so ähnlich, daß eine unmittelbare Entscheidung über die Natur des sie erzeugenden Teilchens nicht möglich ist.

Man könnte zwar die Hoffnung haben, daß sich die Protonen, die bei gleicher Energie etwa die doppelte Reichweite besitzen wie die Deuteronen, durch ihre größere Bahnlänge von den Rückstoßstrahlen unterscheiden. Es ist aber zu bedenken, daß dafür beim Zertrümmerungsprozeß nur die um die Bindungsenergie des *D*-Kerns verminderte Primärenergie zur Verfügung steht, die sich dann noch in geeigneter Weise auf die drei Teilchen im Endzustand verteilen muß. Beim elastischen Stoß hingegen kann das Deuteron bis zu acht Neuntel der Anfangsenergie des Neutrons aufnehmen.

Wenn man also z. B. mit 5-MeV-Neutronen in ein D_2-Gas hineinschießt, so ist zu erwarten, daß sich infolge der Richtungsverwaschung Rückstoßdeuteronen alle Energien vom Werte Null bis zu etwa 4,4 MeV mit gleicher Wahrscheinlichkeit wiederfinden, im Mittel also Deuteronen von ungefähr 2,2 MeV, während der Mittelwert der Protonenenergien für die Zertrümmerungsprozesse etwa 1 MeV betragen sollte.

Da aber die Reichweite eines Protons von 1 MeV etwa der eines Deuterons von 1,4 MeV entspricht und solche Teilchen durchaus als Rückstoßkerne zu erwarten sind, so sieht man jedenfalls, daß eine Bestimmung der Teilchennatur durch Betrachtung der Reichweiten allein nicht ausreicht.

Es gelingt aber ebensowenig, beide Spurensorten durch ihre Tröpfchendichte zu unterscheiden, weil ihre Bilder, für gleichlange Stücke vom Bahnende an gerechnet, bei der an sich hohen Ionisation praktisch das gleiche Aussehen haben.

Es besteht also lediglich die Möglichkeit, daß bei einer statistischen Auswertung von sehr vielen Spuren die Häufigkeitsverteilung der verschiedenen Reichweiten für beide Teilchensorten voneinander abweicht. So würde sich beim obigen Beispiel für die Rückstoßatome ein Energiespektrum der Form $\mathrm{const} \cdot dE$ ergeben, während für die Protonen der Zertrümmerungsprozesse eine Bevorzugung der Energiewerte um 1 MeV zu erwarten wäre. Denn in diesem Falle wird das Energiespektrum der Zertrümmerungsprotonen jedenfalls nach kleinen Energien hin abnehmen müssen. In gleicher Weise gilt dies für die Energieverteilung der emittierten Neutronen. Der Zustand, bei dem die drei Teilchen am Ende des Prozesses etwa gleiche Energie haben, wird darum viel wahrscheinlicher sein, als einer, bei dem eines von ihnen die ganze verfügbare Energie fast allein übernimmt.

Die Energien der beobachteten Protonen werden sich demnach um den Mittelwert von 1 MeV herum gruppieren, und ihre Häufigkeitsverteilung sollte in diesem Gebiet ein Maximum besitzen. Im Anhang § 7 B werden wir dies ausführlicher begründen.

Ganz allgemein sollte man erwarten, daß beim Beschuß eines D_2-Gases mit Neutronen einheitlicher Energie die Reichweitenverteilung aller beobachteten Spuren neben dem Spektrum der Rückstoßatome, das der Energieverteilung $\mathrm{const} \cdot dE$ entspricht und demzufolge ungefähr die Form besitzt $\mathrm{const} \cdot \frac{dR}{\sqrt{R}}$, noch ein diesem überlagertes zeigt, das von der *D*-Zerstrümmerung herrührt und sich durch ein Maximum heraushebt.

Die Untersuchung wurde deshalb so durchgeführt, daß sie die Reichweitenverteilung der Spuren in einem D_2-Gas zu messen gestattet, die sich bei Bestrahlung mit einer *RaBe*-Quelle von 500 mCurie in der Wilson-Kammer zeigen.

Die Neutronenquelle hat nach den Angaben von Dunning, Bonner und Mott-Smith gerade im Gebiet um 5 MeV, nämlich bei 4,6 und 6,2 MeV, relativ intensive Neutronengruppen. Außerdem aber besitzt das Energiespektrum einen nach großen Energien hin rasch abfallenden kontinuierlichen Untergrund. Dadurch wird allerdings das Hervortreten eines von der Zertrümmerung des Deuterons herrührenden sekundären Maximums, wie man es bei einheitlicher

Energie der Primärneutronen erwarten dürfte, nach den Betrachtungen in § 6 und 7 sehr erschwert.

Es wurde darum unter völlig gleichen Bedingungen dieselbe Reichweitenverteilung auch für Rückstoßprotonen aufgenommen, die man bei einer H_2-Füllung der Kammer erhielt. Es bestand dann immerhin die Hoffnung, daß beide Kurven, abgesehen von den durch die verschiedenen Massen bedingten Unterschiede, noch Abweichungen voneinander zeigten, die auf den Zertrümmerungsprozeß zurückzuführen waren.

§ 3

Die Wilson-Kammer und das Ausmeßverfahren

Die vollautomatisch arbeitende, zylindrische Wilson-Kammer, die ursprünglich für Untersuchungen der Ultrastrahlung gebaut wurde, hat einen Durchmesser von 28 cm und eine Tiefe von 8 cm. Die Beleuchtung erfolgt von der Schmalseite her, senkrecht zu den optischen Achsen der Photoapparate. Als Lichtquelle dient ein mit Argon gefülltes Hartglasentladungsrohr, das durch Anschalten von zwei Kondensatoren von je 5 μF Kapazität und 10000 Volt Betriebsspannung kurzzeitig ($\sim 10^{-5}$ sec) zum Aufleuchten gebracht wird. Der sehr helle, linienförmige Lichtblitz befindet sich in der Brennlinie einer Zylinderlinse von 8 · 30 cm Größe und 12 cm Brennweite und leuchtet so die Kammer nahezu homogen aus.

Eine Schaltwalze sorgt dafür, daß in Abständen von je 70 sec eine Aufnahme erfolgt und in der Zwischenzeit alle für die erneute Betriebsbereitschaft der Kammer, der Beleuchtungseinrichtung und der Photoapparate notwendigen Schaltvorgänge ausgelöst werden.

Die stereoskopischen Bilder wurden von zwei Photoapparaten mit Objektiven von 4 cm Brennweite (Zeiß Biotar) bei Blende 4 in 70 cm Abstand von der Kammermitte aufgenommen. Die parallelen optischen Achsen hatten einen Abstand von 11 cm.

Für die Auswertung der Aufnahmen stand ein Pulfrichscher Stereokomparator zur Verfügung. Er diente dazu, die Koordinaten von Anfangs- und Endpunkt der Spuren in der Kammer, bezogen auf eine in ihr angebrachte Eichmarke, zu ermitteln. Mit einem eigens für diese Zwecke gebauten Zeigermeßgerät ließen sich dann deren Längen und Winkel gegen die Stoßrichtung der einfallenden Neutronen direkt ablesen.

Die durch einen Bleimantel von 7 cm Dicke umgebene Neutronenquelle befand sich in 84 cm Entfernung von der Kammermitte.

Es war nötig, einen so großen Abstand des Präparats zu wählen, einerseits, um möglichst gut definierte geometrische Verhältnisse zur Bestimmung der Anfangsrichtung des stoßenden Neutrons zu haben, andererseits weil dadurch die trotz der Abschirmung noch störende γ-Strahlung besser geschwächt wurde und außerdem die von ihr ausgelösten Elektronen sich gleichmäßiger über die Kammer verteilten.

Bei der D_2-Gasfüllung wurde darauf geachtet, daß möglichst alle störenden Wasserdampfreste durch vorherige Austrocknung der Kammer mit warmer Luft beseitigt waren. Das

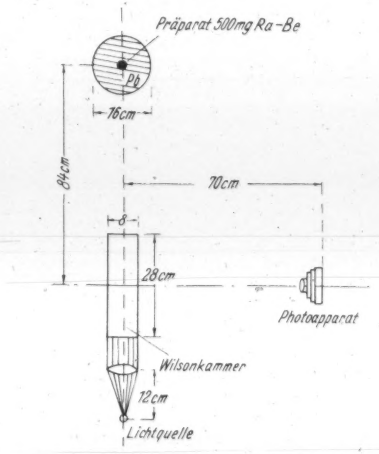


Fig. 1. Anordnung der Apparatur. (Beleuchtung in Wirklichkeit senkrecht zur Zeichenebene!)

durch Elektrolyse von 99,5prozentigem D_2O gewonnene D_2-Gas wurde kurz vor dem Eintritt in die Kammer noch durch eine mit flüssiger Luft gekühlte Dampffalle geleitet. Die Beseitigung aller übrigen Gase geschah in der Weise, daß die Wilson-Kammer zunächst zweimal hintereinander auf 360 mm Druck ausgepumpt, dann bis auf 1000 mm mit D_2-Gas nachgefüllt wurde. Die letzten noch in ihr verbliebenen Fremdgasreste wurden darauf so verdrängt, daß noch einmal der doppelte Kammerinhalt an D_2-Gas von oben in die Kammer einströmte und unten wieder austrat. Man wird so annehmen dürfen, daß sie, abgesehen vom Dampf des D_2O, praktisch mit etwa 98–99 Proz. D_2-Gas angefüllt war. Als Nebelbildner diente D_2O, das auf einem größeren Uhrglas vor Beginn der Gasfüllung in die

Kammer eingeführt war. Das Expansionsverhältnis betrug in diesem Falle 1,33.

Bei den entsprechenden H_2-Aufnahmen wurde dem Wasser etwas Alkohol zugesetzt. Dadurch lag für diesen Fall das Expansionsverhältnis bei dem etwas günstigeren Wert von 1,16. Gleichzeitig stieg damit die Empfindlichkeitsdauer der Wilson-Kammer, die in diesem Falle etwa 7,5 Spuren pro Aufnahme zeigte, während bei D_2-Gasfüllung nur 5,2 Spuren/Aufnahme zu sehen waren.

Im ganzen wurden 1600 auswertbare Bilder (etwa 800 je Teilchensorte) vermessen, auf denen ungefähr 6000 Protonenspuren und 4200 Deuteronenspuren zu sehen waren. Der überwiegende Teil von ihnen war allerdings für die Messung ungeeignet. Erstens, weil viele an den Wänden endigten oder jedenfalls teilweise im unbeleuchteten Teil der Kammer verliefen. Zweitens aber, weil die meisten Spuren von sehr energiearmen Teilchen herrührten, also kurze Reichweite besaßen, die im Rahmen der hier gestellten Frage nicht von Interesse waren.

Bei der Vermessung und Auswertung der Aufnahmen wurden darum grundsätzlich einfach alle Spuren weggelassen, deren Länge sich als kleiner als 25 mm erwies. Außerdem fanden auch jene keine Berücksichtigung, bei denen aus irgendwelchen Gründen, z. B. weil das Teilchen zu früh vor der Expansion die Kammer durchsetzte, Anfangs- oder Endpunkt nicht sicher feststellbar waren.

Es wurden überhaupt nur Spuren zur Vermessung herangezogen, die im beleuchteten Teil der Kammer, also irgendwo mitten im Gasraum, deutlich begannen und auch dort endigten.

Die Möglichkeit, daß dabei eine durch subjektive Einflüsse bedingte systematische Auswahl getroffen wurde, lag nicht vor, da bei der Vermessung im Stereokomparator jedenfalls beim größten Teil der Aufnahmen die Verschiedenheit der Ergebnisse für D_2 und H_2 noch gar nicht bekannt war und sich erst nach Abschluß beider Meßreihen zeigte, und da weiterhin während der Bestimmung der Koordinaten man nur schätzungsweise grobe Anhaltspunkte für die Längen der Spuren besaß. Schließlich zeigten zwei getrennte Meßreihen verschiedener Teile der Aufnahmen, von denen die eine von Herrn Dr. M. Stobbe, die andere vom Verfasser durchgeführt wurden, beide die gleichen Besonderheiten in den hier interessierenden Punkten.

Die Umrechnung der gefundenen Spurlängen in D_2 und H_2 auf Normalverhältnisse in Luft von 15° C und 750 mm erfolgte nach Maßgabe von Eichaufnahmen mit *Po*-α-Teilchen. Es zeigte sich dabei, daß die Reichweite dieser Partikel in H_2 153 mm betrug. Dies entspricht der bekannten Normallänge in Luft von 38,7 mm. Demzufolge wurde als Umrechnungsfaktor für alle Messungen $K = \frac{153}{38{,}7} = 3{,}95$ genommen. Dabei konnten die D_2-Werte völlig wie die H_2-Werte behandelt werden, da das Bremsvermögen beider Gase praktisch übereinstimmen dürfte. Eine Nachprüfung dieser Annahme erfolgte allerdings nicht.

§ 4

Meßgenauigkeit und Störungen

Die Genauigkeit der Reichweitenbestimmung von Rückstoß- und Zertrümmerungsbahnen ist durch die Diffusionsunschärfe der Spuren selbst begrenzt.

Da diese vom Alter der Spur relativ zum Zeitpunkt der Expansion abhängt, der Durchgang des Teilchens durch die Kammer aber zeitlich nicht festliegt, so hat man breitere und schärfere Bahnen nebeneinander. Dies bringt bei den breiteren, aber sonst klar definierten unter ihnen eine gewisse Unsicherheit der Längenbestimmung mit sich. Das ganze Meßverfahren wurde darum so eingerichtet, daß sich der Wert einer Koordinate bis auf maximal 2 mm Unsicherheit ergab. Bei den längeren Spuren von etwa 15–20 cm dürfte darum der mittlere Fehler der Reichweitenangabe etwa 5 mm betragen. Für die kleineren Bahnen sollte er abnehmen und bei denen von 30 mm Länge nur noch etwa 2–3 mm ausmachen.

Eine gewisse Unsicherheit besteht bezüglich der Winkelangaben zwischen Stoßrichtung des Neutrons und Bahn des getroffenen Kerns. Denn wenn z. B. der Durchgang des Teilchens kurz vor der Expansion erfolgt ist, dann erfährt ja die entstehende Spur durch die Gasbewegung eine Verlagerung, die Anfangs- und Endpunkt in verschiedener Weise betreffen kann. Die dadurch entstehende Unschärfe in der Winkelbestimmung beträgt in ungünstigen Fällen bis zu 6°. Wenn man bedenkt, daß infolge der Streuwirkung des *Pb*-Absorbers die Neutronen nicht direkt aus der Richtung des *RaBe*-Präparats zu kommen brauchen, so ist außerdem auch die Anfangsrichtung der Primärteilchen für die hier verwendete Anordnung nur bis auf eine Unsicherheit von etwa 8° bekannt. Im ganzen muß man in gewissen Fällen also immerhin einen möglichen Fehler der Winkelbestimmung von 10° zulassen.

Da aber die Energie des primären Neutrons sich aus der des Rückstoßatoms ergibt aus der Beziehung:

$$E_0 = \frac{E_r}{\cos^2 \vartheta}$$

so sieht man, daß damit für Stoßwinkel von 80–90° die Energiebestimmung der Primärneutronen ungenau wird, weil kleine Änderungen des Winkels ϑ sich im Faktor $\frac{1}{\cos^2\vartheta}$ sehr stark auswirken.

Schließlich ist noch auf eine Fehlerquelle hinzuweisen, die die Häufigkeit des Auftretens von Spuren bestimmter Reichweite betrifft. Da nämlich die Kammer einen rechteckigen Querschnitt von $8 \cdot 30\,cm^2$ besitzt, so bedeutet dies, daß lange Spuren von mehr als 8 cm Länge unter relativ spitzem Winkel gegen die Anfangsrichtung des Neutrons verlaufen müssen, damit sie möglichst die Begrenzungsflächen der Kammer nicht treffen. Außerdem müssen längere Spuren, damit sie überhaupt im Gasraum selbst noch enden, im oberen Teil der Kammer entstehen.

Es sind in diesem Bereich der Spurlängen also zwei Bedingungen, im folgenden kurz Auswahlbedingungen genannt, zu erfüllen, denen nur wenige Bahnen gerecht werden. So wird dann scheinbar nach großen Reichweiten hin ein rascher Abfall der Häufigkeitsverteilungen erzwungen, der in Wirklichkeit nicht vorhanden zu sein braucht.

§ 5

Die Energieverteilung der Primärneutronen und der Rückstoßatome

Aus den Reichweiten der Rückstoßprotonen und den Stoßwinkeln zwischen der Primärrichtung der Neutronen und den Bahnen jener

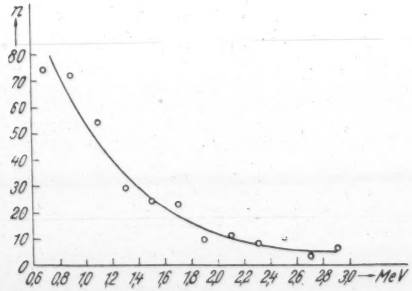


Fig. 2. Energieverteilung der Primärneutronen.

Teilchen erhält man durch einfache Umrechnung die Energien der auftreffenden Neutronen. In Fig. 2 ist die derart bestimmte Häufigkeitsverteilung dieser Partikel angegeben.

Man entnimmt ihr, daß das Energiespektrum der Neutronen im Bereiche von 0,8 bis 3 MeV praktisch monoton abfällt. Oberhalb von 3 MeV sind die Energiebestimmungen sehr unsicher, so daß wir hier auf die Einzelangaben verzichtet haben.

Im ganzen wurde aber festgestellt, daß von 330 vermessenen Protonenbahnen 64 auf eine Primärenergie von mehr als 3,5 MeV schließen lassen.

Vergleicht man diese Ergebnisse mit den Messungen von Dunning[1]), so zeigt sich, daß rein qualitativ die Kurven in beiden Fällen den Abfall nach großen Energien hin besitzen, der wirkliche Wert der Steilheit an entsprechenden Stellen ist in unserem Falle um einen Faktor 2 bis 3 größer.

So sollte nach Dunning die Häufigkeit der Neutronen im Gebiet von 1–2 MeV um weniger als die Hälfte absinken, während im Spektrum der Fig. 1 eine Abnahme um einen Faktor 4 bis 5 vorhanden ist.

Bis zu einem gewissen Grade ist dies durch die besonderen Auswahlbedingungen bei der Wilson-Kammermessung erzwungen, bei der eben die längeren Spuren den kürzeren gegenüber benachteiligt sind. Das wirkliche Energiespektrum der einfallenden Neutronen dürfte also zweifellos flacher verlaufen. Die Korrektionen, die an der Wilson-Kammermessung anzubringen wären, um vergleichbare Ergebnisse zu erhalten, wurden jedoch nicht festgestellt, da der genaue Verlauf der Häufigkeitsverteilung im Rahmen des hier gestellten Problems nicht interessiert.

Inwieweit die hier besprochenen Messungen in sich widerspruchsfrei sind, ließ sich in einfacher Weise an den Energieverteilungen der *H*- und *D*-Rückstoßatome nachprüfen. Wie nämlich im Anhang gezeigt wird, muß sich bei gegebenem Spektrum der Protonen das der Deuteronen theoretisch ableiten lassen.

Sei $n_P(E)\,dE$ die Zahl der Rückstoßprotonen im Energieintervall von E bis $E+dE$, so muß die der Deuteronen $n_D(E)\,dE$ lauten:

$$n_D(E)\,dE = \tfrac{3}{8}\, n_P(\tfrac{3}{8}E)\,dE\,.$$

Von der zahlenmäßig nicht ins Gewicht fallenden Zertrümmerung der Deuteronen soll dabei abgesehen werden. In Fig. 3 ist die experimentell bestimmte Kurve für die Protonen und die theoretisch erwartete für die *D*-Kerne eingezeichnet. Außerdem sind die gemessenen Häufigkeiten der n_D eingetragen. Wie man sieht, passen sich die Meßwerte dem theoretischen Verlauf an, so gut, als man aus statistischen Gründen überhaupt erhoffen darf.

1) Dunning, Phys. Rev. **45**, 586, 1934.

Die Winkelverteilung der Rückstoßatome sollte unabhängig vom Spektrum der Primärneutronen das Verteilungsgesetz befolgen:

$$n(\vartheta)\, d\vartheta = n_0 \sin 2\vartheta\, d\vartheta .$$

Die Streuwinkel der verschiedenen Bahnen gruppieren sich in ihrer Häufigkeit demnach

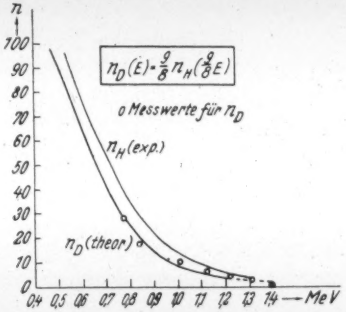


Fig. 3. Energieverteilung der Rückstoßatome.

symmetrisch zu $\vartheta = 45°$, wobei gleichzeitig $n(\vartheta)$ bei diesem Winkel sein Maximum erreichen sollte.

Die in Fig. 4 dargestellten Kurven der experimentell bestimmten Häufigkeiten besitzen die geforderten Maxima. Ihre Lage ist allerdings nach kleineren Winkeln hin verschoben. Gerade dies ist aber auch zu erwarten, denn bei der Vermessung wurden ja alle Spuren, deren Länge

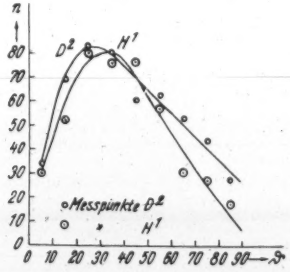


Fig. 4. Winkelverteilung der Rückstoßatome.

weniger als 30 mm betrug, überhaupt nicht berücksichtigt, d. h. also nur energiereichere Teilchen mitgenommen, die im allgemeinen auch zu kleineren Stoßwinkeln gehören.

Außerdem wirken die schon mehrfach erwähnten Auswahlbedingungen in solchem Sinne, daß jedenfalls bei den längeren Bahnen jene mit kleinen Stoßwinkeln mit höherer Wahrscheinlichkeit erfaßt werden als die mit großer Abweichung von der Primärrichtung.

§ 6

Die Reichweitenverteilung der Rückstoßkerne und die Zertrümmerungsprozesse

Wie bereits im § 2 auseinandergesetzt wurde, ist zu erwarten, daß die Reichweitenverteilung der Deuteronen von der der Protonen abweicht, wenn Zertrümmerungsprozesse in merklicher

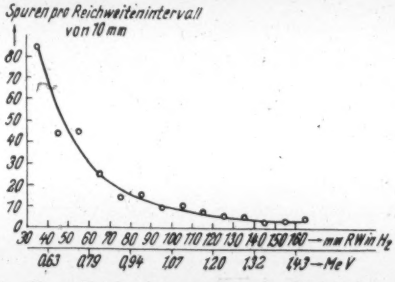


Fig. 5. Reichweitenverteilung der Rückstoßprotonen in H_2.

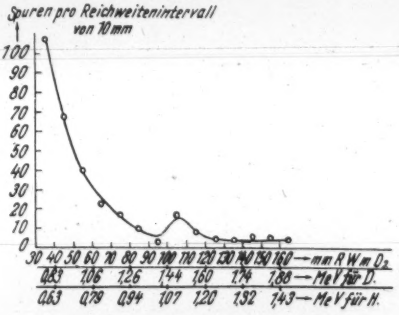


Fig. 6. Reichweitenverteilung der Rückstoßatome und Zertrümmerungsprotonen in D_2.

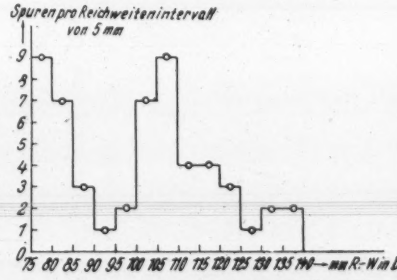


Fig. 7. Reichweitenverteilung der Rückstoßatome und Zertrümmerungsprotonen in D_2.

Anzahl auftreten. In den Fig. 5, 6 und 7 sind nun die gesamten Meßergebnisse für die Protonen und Deuteronen aufgetragen. Dabei stellt die Fig. 7 nur einen vergrößerten Ausschnitt aus Fig. 6 dar. Die Reichweitenintervalle sind in Fig. 7 nur halb so groß wie die in Fig. 6.

Bemerkenswert an diesen Kurven ist nun folgendes: Während die Häufigkeitsverteilung der Protonenreichweiten ohne auffällige Besonderheiten im Gebiet von 30–170 mm gleichförmig abfällt, zeigt die entsprechende Kurve für die Deuteronen ein deutliches Maximum in der Gegend von 100–110 mm Reichweite. Dies tritt besonders klar in Fig. 7 hervor.

Die Zahl der Bahnen im Bereich zwischen 100 und 110 mm Reichweite ist dabei um so viel größer, verglichen mit der Häufigkeit der Spuren etwa im angrenzenden Gebiet zwischen 90–100 mm, daß der Überschuß **nicht** durch statistische Schwankungen erklärt werden kann.

Es bestand nun zunächst der Verdacht, daß dieser Buckel irgendwie durch das Meßverfahren vorgetäuscht sein könnte. Wenngleich dies allein schon durch die Reichweitenverteilung der H-Rückstöße der Fig. 5 widerlegt ist, die ja dann einen ähnlichen Verlauf zeigen müßte, wurden dennoch zwei unabhängige Meßreihen an verschiedenen Aufnahmeserien durchgeführt, die jede für sich im fraglichen Gebiet das Maximum zeigten. Außerdem wurden bei einem Teil der Messungen zur Prüfung nur Spuren berücksichtigt, die nahezu parallel zu den Begrenzungsflächen und ziemlich genau in der Mitte der Wilson-Kammer in einer scharf begrenzten Schicht von 40 mm Tiefe verliefen. Auch diese Teilserie zeigte eine Anhäufung der Reichweiten bei 100 mm.

Da sich in allen Fällen immer wieder das Maximum einstellte, scheint damit die Existenz dieses Kurvenverlaufs sichergestellt. Ob das Minimum im Gebiet zwischen 80–100 mm so scharf ausgeprägt ist, wie es nach Lage der Meßpunkte zu sein scheint, ist allerdings in Anbetracht der im ganzen noch immer geringen Zahl der Bahnen unsicher.

Zur Deutung dieser Besonderheit des Kurvenverlaufs scheint es keine andere Möglichkeit als die der Zertrümmerung des Deuterons zu geben, und zwar aus folgenden Gründen:

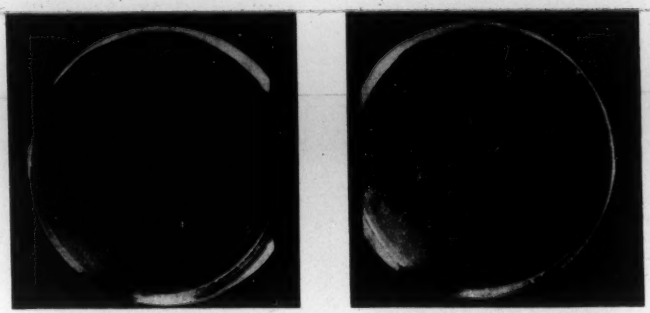
1. Verunreinigungen durch Wasserstoff (1 bis 2 Proz. sind immerhin nicht auszuschließen) würden ja nur insofern in Erscheinung treten, als sich der Häufigkeitsverteilung der Rückstoßdeuteronen eine entsprechend reduzierte der Protonen vom Charakter der in Fig. 5 dargestellten überlagern würde. Dies kann aber nicht zur Ausbildung eines Maximums führen.
2. Ebensowenig wäre eine etwa vorhandene Lücke im Energiespektrum der Primärneutronen zur Erklärung dieses Kurvenverlaufs geeignet, da ja sogar eine energetisch absolut scharfe Gruppe von Neutronen infolge der Richtungsverwaschung ein Spektrum der Rückstoßatome der Form const $\cdot dE$ erzeugt. Die Ausbildung eines Minimums, wie es im Bereich zwischen 80–100 mm vorliegt, wäre demnach nicht verständlich.
3. Man könnte noch vermuten, daß vielleicht irgendwelche Fremdgasverunreinigungen, etwa Stickstoff oder Sauerstoff, für das Auftreten von Spuren bestimmter Reichweite verantwortlich seien. Dies wäre z. B. bei Resonanzprozessen durchaus denkbar. Es ist aber dagegen einzuwenden, daß erstens nach der Art der Füllung der Kammer mit D_2 praktisch alle Fremdgase aus der Kammer verdrängt wurden. Andererseits sollten die Atome, an denen die Prozesse stattfinden, dann Rückstöße erleiden, die sichtbar sein müßten. Unter den 2000 durchgesehenen Aufnahmen finden sich aber nur zwei mit geknickten Spuren. Ihre Bilder sind auf Tafel XIX, Fig. 10 wiedergegeben

Wenn man nun annimmt, daß die Anhäufung von Teilchen im Bereich von 100–110 mm Reichweite auf Zertrümmerungsprozesse zurückzuführen ist, so wird damit immerhin die Lage des Maximums erklärlich. Eine Schwierigkeit bildet allerdings die Form des Kurvenverlaufs.

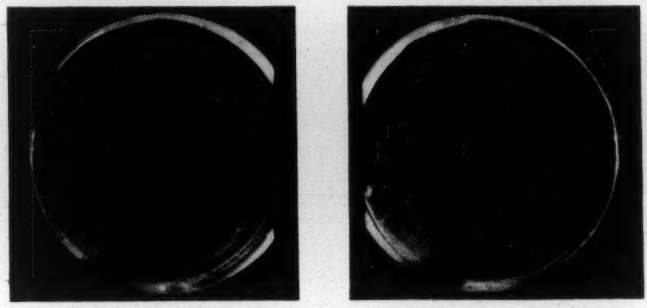
Das Maximum ist auf jeden Fall viel stärker ausgeprägt als überhaupt zu erwarten ist. Selbst bei einheitlicher Neutronenenergie sollte es nicht so deutlich hervortreten.

Wie nämlich im Anhang gezeigt und in der Fig. 8 erläutert wird, sollte sich theoretisch ein sehr flacher Verlauf des Energiespektrums der Zertrümmerungsprotonen einstellen. Sein Maximum würde sich zwar bei Berücksichtigung der Auswahlbedingungen in der Gegend von 1 MeV befinden, wenn man aber etwa der gleichmäßig abfallenden theoretischen Kurve der Rückstoßdeuteronen von Fig. 3 eine von denen der Fig. 8 für einen Wirkungsquerschnitt zwischen 10^{-25} bis 10^{-24} cm² überlagert, so bedeutete dies praktisch eine nur unwesentliche Abflachung des Abfalls. Von der Ausbildung des Maximums wäre fast nichts zu merken.

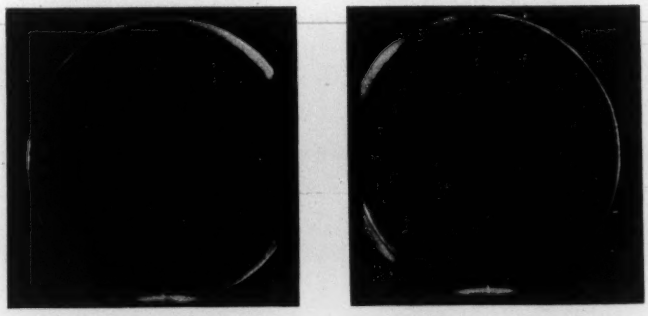
Es ist nun zu bedenken, daß zunächst einmal bei der Ableitung der theoretischen Verteilungsfunktion aus Gründen der Einfachheit mit räumlich isotroper Emission der Spaltprodukte beim Zertrümmerungsprozeß gerechnet wurde. Dies ist nicht ganz gerechtfertigt. Denn nach den



9a

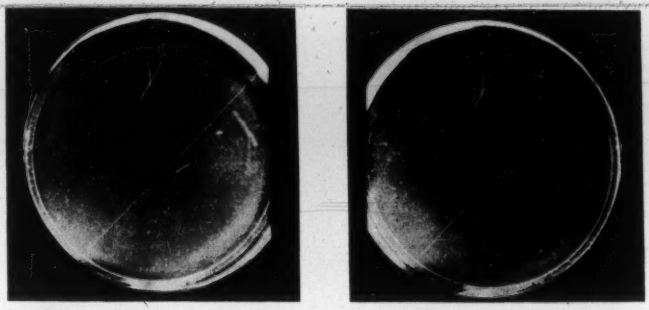


9b

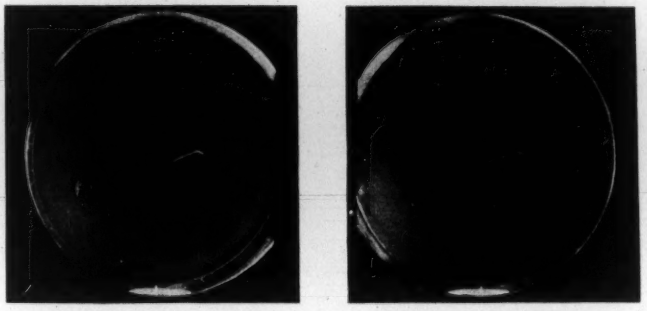


9c

Fig. 9a, b, c. Drei Beispiele für die bei D_2-Gasfüllung auftretenden Spuren.



10a



10b

Fig. 10a, b. Die beiden auf Seite 232 erwähnten Aufnahmen mit geknickten Bahnen. Kammerinhalt: D_2 und D_2O. — 10b wahrscheinlich $O^{16}(n, \alpha)C^{13}$.

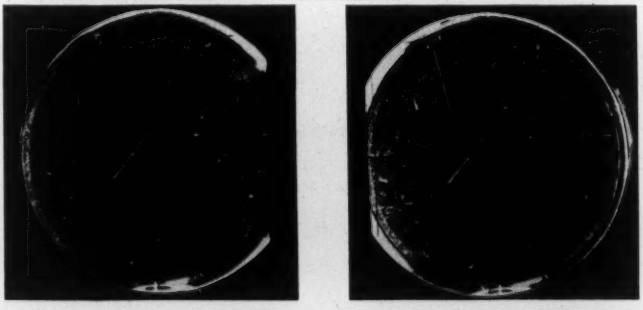


Fig. 11. Beispiel einer Aufnahme bei H_2-Gasfüllung. Rückstoßprotonen.

Messungen von Krüger und Shoupp[1]) verläuft schon die elastische Streuung von Neutronen mit 2,6 MeV Energie an Deuteronen nicht isotrop. Erst recht wird man erwarten, daß auch beim Zertrümmerungsprozeß eine Anisotropie der Partikelemission vorhanden ist, deren richtige Berücksichtigung für die Energieverteilung der Protonen eine stärkere Ausbildung des Maximums mit sich bringen könnte, da jede Richtungsausblendung bei Beachtung von Energie- und Impulssatz den Bereich der Möglichkeiten für die Festlegung der Teilchenenergien einengt.

Weiterhin ist natürlich noch darauf hinzuweisen, daß die wirkliche Anzahl der beobachteten Teilchen im Gebiete von 80–120 mm mit nur 37 Spuren im ganzen sehr gering ist. Aus statistischen Gründen muß man also ohne weiteres noch so große Fehler der einzelnen Meßpunkte zulassen, daß es gestattet ist, die Kurve im fraglichen Bereiche auch flacher zu zeichnen, und es ist durchaus möglich, daß bei weiterer Erhöhung der Zahl der vermessenen Spuren das Minimum teilweise aufgefüllt wird.

Unabhängig davon dürfte aber sicher sein, daß der Kurvenverlauf immer noch eine gewisse Bevorzugung der Reichweiten um 100 mm beibehält, die größer ist als den unter einfachen theoretischen Annahmen hergeleiteten Angaben entspricht. Man muß sie wohl als einen Hinweis darauf ansehen, daß der Wirkungsquerschnitt für den Stoß schneller Neutronen auf Deuteronen an irgendeiner Stelle ein resonanzartiges Verhalten besitzt und außerdem in diesem Gebiet die von Krüger und Shoupp festgestellte Richtungsanisotropie beim Stoßprozeß Neutron-Deuteron für die Energieverteilung der Rückstoß- und Zertrümmerungsteilchen eine gewisse Rolle spielt.

Daß man aber die Bevorzugung des Reichweitenbereichs von 100–110 mm mit der Zertrümmerung des Deuterons in Zusammenhang bringt, scheint deshalb gerechtfertigt, weil bei der Reichweitenverteilung der Protonen eine analoge Anomalie nicht auftritt und darum nicht einzusehen ist, wieso ohne Zertrümmerungsprozesse bei den Deuteronen eine solche vorhanden sein sollte.

Eine endgültige Entscheidung über die Richtigkeit dieser Annahme ist durch die für diese Fragestellung etwas schwerfällige Wilson-Kammermessung leider kaum zu erbringen und würde wohl besser auf anderem Wege zu fällen sein.

Für das folgende werde nunmehr angenommen, daß die obige Deutung für die Entstehung des Maximums zutreffe.

1) Krüger und Shoupp u. a., Phys. Rev. **53**, 1014, 1938.

Eine Angabe über den Wirkungsquerschnitt für den Zertrümmerungsprozeß, die allerdings nur den Wert einer sehr groben Abschätzung haben kann, entnimmt man dann der Fig. 7. Wenn man nämlich von einem gewissen kontinuierlichen Untergrund absieht, der durch den Verlauf der Kurve im Bereich von 120–170 mm Reichweite angedeutet ist, bleiben im ganzen etwa 16–20 beobachtete Zertrümmerungsprozesse übrig.

Nun ist von den Wasserstoffaufnahmen her bekannt, daß, bezogen auf 330 Protonenbahnen, 64 Stoßprozesse festgestellt wurden, die auf Primärneutronen von mehr als 3,5 MeV Energie zurückzuführen sind. Da bei den Deuteronen entsprechend 381 Bahnen vermessen wurden, so sollten also etwa $64 \frac{381}{330} = 74$ Stöße stattgefunden haben, bei denen jedenfalls aus energetischen Gründen eine Zertrümmerung im Prinzip hätte eintreten können.

In Anbetracht der Schwierigkeiten, die sich beim Vergleich der Wilson-Kammerbestimmungen des Primärspektrums mit denen von Dunning zeigten, wird man wohl auch hier eine Unsicherheit in der Häufigkeitsangabe um einen Faktor 2 zulassen müssen.

Für den Zertrümmerungsquerschnitt – gemittelt über alle vorkommenden Neutronenenergien $> 3{,}5$ MeV im Primärspektrum – erhält man so den Wert:

$$\overline{\sigma_{\substack{\text{Zertr.}\\ \text{Neutron}}}} \approx \frac{16}{74}\sigma_{\text{Str}} \sim 3 \cdot 10^{-25}\ \text{cm}^2 .$$

Barkas und White geben für Protonen von 5,2 MeV an:

$$\sigma_{\substack{\text{Zertr.}\\ \text{Proton}}} = 1{,}5 \cdot 10^{-26}\ \text{cm}^2 .$$

§ 7

Mathematischer Anhang

A. Energie- und Winkelverteilung der Rückstoßatome

Für das Folgende wurde zur Vereinfachung angenommen, daß der Streuvorgang, vom Schwerpunktssystem aus gesehen, räumlich isotrop verlaufe. Sei für den Beobachter ϑ der Winkel zwischen der Bahn des Rückstoßatoms und der Primärrichtung des Neutrons und Θ der entsprechende im Schwerpunktssystem, so ist die Zahl der in den Winkelbereich $d\vartheta$ gestreuten Rückstoßatome gegeben durch:

$$n(\vartheta)d\vartheta = \frac{n_0}{2}\sin\Theta d\Theta . \qquad (1)$$

n_0 ist dabei die Trefferzahl. Weiter wird vorausgesetzt, daß es sich um Neutronen einheitlicher Energie handelt.

Aus Energie- und Impulssatz und rein geometrischen Betrachtungen folgt, daß ganz allgemein, unabhängig von der Masse der getroffenen Atome gilt:

$$\Theta = 2\,\vartheta\,. \tag{2}$$

Damit erhält man für die Winkelverteilung die in § 5 diskutierte Beziehung:

$$n(\vartheta)\,d\vartheta = n_0 \sin 2\,\vartheta\,d\vartheta\,. \tag{3}$$

Aus Energie und Impulssatz entnimmt man ferner für die Energie E_2 des getroffenen Kerns der Masse M:

$$E_2 = \frac{4\,m\,M}{(m+M)^2}\,E_0 \cos^2\vartheta\,. \tag{4}$$

Dabei ist E_0 die Energie und m die Masse des stoßenden Neutrons. Aus Gleichung (3) und (4) zusammen folgt schließlich die Energieverteilung der Rückstoßatome:

$$n(E_2)\,dE_2 = n(\vartheta)\,d\vartheta = \frac{n_0}{\alpha}\,\frac{dE_2}{E_0}\,, \tag{5}$$

dabei ist

$$\alpha = \frac{4\,m\,M}{(m+M)^2} = \begin{cases} 1 & \text{für den Stoß Neutron-Proton} \\ \frac{8}{9} & \text{für den Stoß Neutron-Deuteron.} \end{cases}$$

Die Gleichung (5) enthält das allgemein bekannte Ergebnis, daß infolge der Richtungsverwaschung bei scharfer Neutronenenergie das Spektrum der Rückstoßatome die Gestalt hat:

$$\text{const} \cdot dE\,.$$

Besitzen die einfallenden Neutronen selbst eine kontinuierliche Energieverteilung $n_0(E_0)\,dE_0$, dann gilt für $n(E_2)\,dE_2$ die Formel:

$$n(E_2)\,dE_2 = \frac{dE_2}{\alpha}\int_{\frac{E_2}{\alpha}}^{\infty}\frac{dE_0}{E_0}\,n_0(E_0)\,,$$

d. h. also, wenn man bei gleichem $n_0(E_0)\,dE_0$ einmal die Energieverteilung der Rückstoßprotonen n_P und dann die der Rückstoßdeuteronen n_D bestimmt, so sollten beide in folgender Weise miteinander zusammenhängen:

$$n_D(E)\,dE = \tfrac{9}{8}\,n_P(\tfrac{9}{8}\,E)\,dE\,. \tag{6}$$

Die Gültigkeit dieser Beziehung wurde in § 5 am Experiment geprüft.

B. Energieverteilung der Zertrümmerungsprotonen

Die genaue Berechnung der Energieverteilung der beim Zertrümmerungsprozeß des Deuterons ausgesandten Protonen erfordert zweifellos quantentheoretische Betrachtungen. In erster Näherung kann man sie aber sicher rein klassisch bestimmen, da die de Broglie-Wellenlängen dieser Teilchen — sofern sie nicht zu hohe Energien besitzen — immerhin größer sind als die Kerndimensionen. Die Matrixelemente werden demzufolge nur wenig von der Energie abhängen und wir wollen sie für eine überschlägige Betrachtung einfach als konstant betrachten.

Die Energie des auftretenden Neutrons sei

$$E_0 = \frac{q^2}{2\,m}\,. \tag{7}$$

Dann steht für die Zertrümmerungsprodukte im ganzen noch zur Verfügung:

$$E_2 = E_0 - E_D = \frac{P^2}{2\,m} \tag{8}$$

(E_D = Bindungsenergie des D^2).

Die letzte Gleichung soll als Definitionsgleichung für P aufgefaßt werden.

Beim Zertrümmerungsprozeß müssen Energie- und Impulssatz erfüllt sein:

$$\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3 = \mathfrak{q}\,. \tag{9}$$

$$\mathfrak{p}_1^2 + \mathfrak{p}_2^2 + \mathfrak{p}_3^2 = P^2\,. \tag{10}$$

$\mathfrak{p}_1$ sei der Impuls des Protons am Ende des Prozesses, $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{p}_3$ die entsprechenden für die beiden Neutronen.

Wenn wir nun auch hier zur Vereinfachung annehmen, daß der Zertrümmerungsprozeß räumlich isotrop verlaufe, d. h. daß keinerlei Richtungsauszeichnung, die mit Gleichung (9) und (10) verträglich wäre, stattfindet, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Proton gerade einen Impulswert besitzt, dessen Komponenten liegen zwischen p_{1x} und $p_{1x} + dp_{1x}$ usw., gegeben durch:

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{p}_1)\,d\mathfrak{p}_1 = C\,d\mathfrak{p}_1\int d\mathfrak{p}_2\int d\mathfrak{p}_3$$
$$(d\mathfrak{p}_i = dp_{ix}\,dp_{iy}\,dp_{iz})\,.$$

Dabei ist über sämtliche möglichen Werte von $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{p}_3$ zu integrieren, die nach Gleichung (9) und (10) bei festem $\mathfrak{p}_1$ noch erlaubt sind.

Diese beiden Bedingungen lassen sich am einfachsten berücksichtigen, indem man sie durch Diracsche δ-Funktionen ausdrückt und unter die Integrale nimmt. Man erhält dann:

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{p}_1)\,d\mathfrak{p}_1 = C\,d\mathfrak{p}_1\int d\mathfrak{p}_2\int d\mathfrak{p}_3\,\delta\left(\frac{\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3 - \mathfrak{q}}{P}\right)\delta\left(\frac{\mathfrak{p}_1^2 + \mathfrak{p}_2^2 + \mathfrak{p}_3^2 - P^2}{P^2}\right). \tag{11}$$

Das Integral über $\mathfrak{p}_3$ gibt jetzt einfach 1, wenn man so verfährt, als stünde die zweite δ-Funktion rechts in Gleichung (11) überhaupt nicht da und man dann nachträglich $\mathfrak{p}_3^2$ durch die Größen $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{q}$ ausdrückt.

Man erhält also:

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{p}_1)\,d\mathfrak{p}_1 = C_1 d\mathfrak{p}_1 \int d\mathfrak{p}_2 \delta\left(\frac{\mathfrak{p}_1^2 + \mathfrak{p}_2^2 + (\mathfrak{q} - \mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_2)^2 - P^2}{P^2}\right). \tag{12}$$

Um einfach integrieren zu können, drücken wir die δ-Funktion durch ihre Fourierdarstellung aus und vertauschen die Reihenfolge der Integrationen:

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{p}_1)\,d\mathfrak{p}_1 = C_1 d\mathfrak{p}_1 \int d\mathfrak{p}_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, c^{-i\omega\cdot 2\frac{\mathfrak{p}_1^2 + \mathfrak{p}_2^2 - \mathfrak{q}\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{q}\mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 + \frac{q^2 - P^2}{2}}{P^2}}$$

$$= C_1 d\mathfrak{p}_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, c^{-\frac{2i\omega}{P^2}\left(\mathfrak{p}_1^2 - \mathfrak{q}\mathfrak{p}_1 + \frac{q^2 - P^2}{2}\right)} \int d\mathfrak{p}_2\, c^{-\frac{2i\omega}{P^2}(\mathfrak{p}_2^2 - \mathfrak{p}_2(\mathfrak{q} - \mathfrak{p}_1))}.$$

Wenn man dabei den Integrationsweg über ω unterhalb der reellen Achse von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt, kann man jetzt in kartesischen Koordinaten einfach über $\mathfrak{p}_2$ integrieren, da der Integrand dann nur aus drei Produkten von Gauß-Funktionen besteht. Man erhält schließlich:

$$f(\mathfrak{p}_1)\,d\mathfrak{p}_1 = C_2 d\mathfrak{p}_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^{\frac{3}{2}}}\, c^{\frac{i\omega}{2P^2}(2P^2 - q^2 - 3\mathfrak{p}_1^2 + 2\mathfrak{q}\mathfrak{p}_1)} \tag{13}$$

Das Integral stellt bei positivem Klammerausdruck im wesentlichen die Γ-Funktion mit dem Argument $\frac{3}{2}$ dar. Ist der Klammerausdruck negativ, so verschwindet es.

Nehmen wir weiterhin an, daß

$$2P^2 - q^2 - 3\mathfrak{p}_1^2 + 2\mathfrak{q}\mathfrak{p}_1 > 0$$

sei, dann wird mit

$$\frac{2P^2 - q^2 - 3\mathfrak{p}_1^2 + 2\mathfrak{q}\mathfrak{p}_1}{2P^2}\,\omega = \alpha$$

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{p}_1)\,d\mathfrak{p}_1 = C_3 d\mathfrak{p}_1 \sqrt{2P^2 - q^2 - 3\mathfrak{p}_1^2 + 2\mathfrak{q}\mathfrak{p}_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{\alpha^{\frac{3}{2}}}\, c^{i\alpha}. \tag{14}$$

Da das Integral eine Konstante darstellt, können wir es ebenso wie die bei der Umformung aufgetretenen konstanten Größen einschließlich eines Faktors 2π von der Integration über φ_1, mit zu C_2 bzw. C_3 schlagen und erhalten schließlich:

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{p}_1)\,d\mathfrak{p}_1 = C_4 \sqrt{2P^2 - q^2 - 3\mathfrak{p}_1^2 + 2q\mathfrak{p}_1\cos\vartheta_1}\cdot \mathfrak{p}_1^2 d\mathfrak{p}_1 d(\cos\vartheta_1). \tag{15}$$

Diese Formel gibt die Häufigkeit der unter dem Winkel ϑ_1 gegen die Primärrichtung ausgesandten Protonen mit dem Impuls $\mathfrak{p}_1$ an.

Zur Bestimmung der Energieverteilung der Zertrümmerungsprotonen für alle beliebigen Winkel ϑ_1 integrieren wir noch über ϑ_1, wobei zu beachten ist, daß die Grenzen dadurch festgelegt sind, daß der unter der Wurzel stehende Ausdruck größer als Null sein muß.

Es ergibt sich so:

$$F(E_1)\,dE_1 = c\left[(E_0 - 2E_D - 3E_1 + 2\sqrt{E_0 E_1})^{\frac{3}{2}} - (E_0 - 2E_D - 3E_1 - 2\sqrt{E_0 E_1})^{\frac{3}{2}}\right] dE_1. \tag{16}$$

Gleichung (16) beschreibt die Häufigkeitsverteilung der beim Zertrümmerungsprozeß auftretenden Protonen, wenn die einfallenden Neutronen die Energie E_0 besitzen. Bei der Berechnung der Zahlwerte ist dabei der zweite Kammerausdruck nur mitzurechnen, solange

$$E_0 - 2E_D - 3E_1 - 2\sqrt{E_0 E_1} > 0.$$

Wenn nur diejenigen Protonen beobachtet werden können, deren Winkel gegen die Primärrichtung zwischen $\vartheta_1 = 0$ und $\vartheta_2 = \vartheta$ liegt, dann lautet die Formel:

$$F(E_1)dE_1 = c\left\{\left[E_0 - 2E_D - 3E_1 + 2\sqrt{E_0 E_1}\right]^{\frac{3}{2}} - \left(E_0 - 2E_D - 3E_1 + 2\cos\vartheta\sqrt{E_0 E_1}\right)^{\frac{3}{2}}\right\} dE_1 . \quad (17)$$

In Fig. 8 ist nun die Funktion (16) aufgetragen, außerdem sind die Verteilungen 17 für $\vartheta = 30$, 45 und 60° eingezeichnet. Wie man sieht, entspricht einer Einschränkung des möglichen Winkelbereichs im Sinne der Auswahlbedingungen in diesem Falle eine Verschiebung der Kurvenmaxima nach größeren Energien, so daß es jedenfalls möglich erscheint, daß bei Primärenergien von etwa 5 MeV der Neutronen sich das Maximum bei etwa 1 MeV einstellt. Die

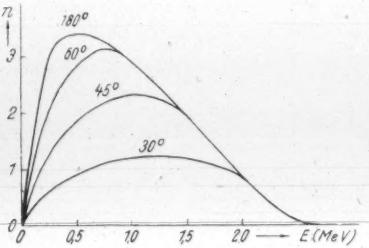


Fig. 8. Häufigkeitsverteilung der Zertrümmerungsprotonen.

Kurven verlaufen allerdings erheblich flacher als die experimentell gefundene, wie auf S. 232 ff. eingehend besprochen wurde.

Die Untersuchung erfolgte auf Anregung von Herrn Prof. Dr. W. Heisenberg. Den für sie notwendigen Aufbau der Wilson-Kammer begann im Frühjahr 1938 Herr Dr. K. Hogrebe. Seit Mai 1939 wurde er dann vom Verfasser fortgeführt und auch beendet. Bei der Entwicklung des mechanischen Teiles half besonders Herr Mechanikermeister W. Paschen durch viele Konstruktionsvorschläge. Die Auswertung eines großen Teiles der Aufnahmen im Stereokomparator nahm Herr Dr. M. Stobbe vor.

Es sei mir gestattet, allen Herren für ihre Hilfe herzlichst zu danken. Ebenso danke ich den Herren Prof. G. Hoffmann und Prof. R. Döpel für ihr Interesse und die technischen Ratschläge beim Aufbau und Betrieb der Apparatur.

Leipzig, Institut für Theoretische Physik, den 18. November 1940.

(Eingegangen 23. April 1942)

Wirkungsquerschnitte der Reaktionen zwischen Neutronen und Deuteronen

Von K. H. Höcker

Einführung. Bisher veröffentlichte Arbeiten über Wirkungsquerschnitte des Deuterons gegenüber Neutronen.

I. Das Grundsätzliche in der Berechnung der Eigenfunktionen, geschildert an der Berechnung der Anfangsfunktion.
  A. Ansatz für die Anfangsfunktion und Aufstellung der Schrödinger-Gleichung.
  B. Lösung der Schrödinger-Gleichung.

II. Berechnung der Wirkungsquerschnitte.
  A. Der Wirkungsquerschnitt für elastische Streuung.
  B. Einfang des Neutrons.
    1. Die Eigenfunktion des Tritons.
    2. Der Einfangprozeß.
    3. Der Wirkungsquerschnitt.
  C. Zertrümmerung des Deuterons.
    1. Die Eigenfunktion des Endzustandes.
    2. Der Wirkungsquerschnitt.

Zusammenfassung.

Von den Reaktionen, die zwischen Neutronen und Deuteronen möglich sind, ist bisher nur der Streuquerschnitt genauer untersucht worden. Es liegen hierüber mehrere experimentelle und auch theoretische Arbeiten vor. Erst aus der neuesten Zeit stammen experimentelle Untersuchungen über die beiden anderen möglichen Prozesse, die Zertrümmerung des Deuterons und den Einfang der Neutronen unter Bildung des Kerns H^3. Ziel der vorliegenden Arbeit soll es sein, die Wirkungsquerschnitte für die beiden angegebenen Reaktionen zu berechnen. Wenn außerdem auch der Streuquerschnitt berechnet wird, so geschieht das, weil die bisher vorliegenden theoretischen Arbeiten von Schiff (1) und Yukawa und Sakata (2) den Austausch der beiden gleichen Teilchen außer acht gelassen haben. Daneben benutzten die Autoren dieser Arbeiten geeignet gewählte Hilfspotentiale, die ihre Gleichungen wesentlich vereinfachten und in denen sie die Schrödinger-Gleichung für ihre Eigenfunktionen integrieren konnten. Schiff hat auf Grund des in vorstehend angegebener Arbeit gewonnenen Ergebnisses auch versucht, den Einfangquerschnitt abzuschätzen (3). Doch ist diese Schätzung an entscheidenden Stellen nur auf ungenaue Annahmen gegründet. Sie weicht von den heutigen experimentellen Ergebnissen erheblich ab. — Wenn es auch nicht möglich ist, das Dreikörperproblem exakt zu lösen, so ist doch immer eine erheblich weitergehende Strenge zu erreichen. Vor allem werden wir den Austauscheffekt nicht vernachlässigen. Einen derartigen Versuch hat bereits Flügge (4) gemacht. Beim Ansatz der Eigenfunktion ist aber Flügge ein Versehen unterlaufen, so daß

sein Ergebnis modifiziert werden muß. — Als Potential für die Kernkräfte wählen wir die Gauß-Funktion. Man könnte daran denken, ein Potential zu wählen, das mit der heutigen Auffassung der Wechselwirkung der Kernbausteine, wie sie aus der Yukawa-Theorie folgt, im Einklang steht. Doch kann hierdurch keine größere Genauigkeit erreicht werden; denn hier ist die Frage der Abbruchstelle in der Entwicklung des Yukawa-Potentials die Fehlerquelle, die ein genaueres Resultat verhindert. Unter Benutzung der Gauß-Funktion wählen wir das Potential so allgemein wie möglich. Auf Grund der Vorstellung von Austauschkräften zwischen den Kernbausteinen ist das Gesamtpotential gegeben durch die Summe der Wechselwirkungspotentiale je zweier Teilchen:

$$V = V_{12} + V_{23} + V_{31} \qquad (1)$$

Der Austausch der Teilchen kann so vor sich gehen, daß entweder mit dem Teilchen auch der Spin den Ort wechselt (Annahme von Majorana) oder aber der Spin am Ort bleibt (Annahme von Heisenberg). Daneben führte Bartlett eine Austauschkraft ein, bei der der Spin von einem Teilchen zum andern wechselt und schließlich hat Wigner gewöhnliche Kräfte, die keine Absättigung zeigen, für die Berechnung der Kerne eingeführt. Wir benutzen mit verschiedenen andern Autoren eine Linearkombination dieser Ansätze:

$$V_{12} = -M_{12}\Sigma_{12}P_{12} - H_{12}P_{12} + B_{12}\Sigma_{12} + W_{12}. \qquad (2)$$

Dabei ist Σ_{12} ein Operator, der die Spins der Teilchen 1 und 2 vertauscht, während P_{12} entsprechend die Ladungen von 1 und 2 vertauscht. M, H, B und W sind Potentialfunktionen:

$$\left.\begin{aligned} M &= m \cdot U \qquad B = b \cdot U \\ H &= h \cdot U \qquad W = w \cdot U \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$U_{12} = -A \cdot e^{-b^2 r_{12}^2}. \qquad (4)$$

Auf Grund der Forderung, daß sich bei schweren Kernen die Absättigungserscheinungen ergeben und beim Deuteron die bekannten Daten richtig herauskommen, berechnete Volz (15) die Größen m, h, b und w. Unter Berücksichtigung einer Korrektur von Kemmer (16) ist

$$m = \tfrac{10}{12} \quad b = \tfrac{5}{12} \quad h = -\tfrac{2}{12} \quad w = -\tfrac{1}{12}. \qquad (5)$$

Die Polarisation des Deuterons durch das einfallende Teilchen werden allerdings auch wir vernachlässigen, ebenso wie alle Arbeiten vorher.

Nach Abschluß der Rechnungen erschien eine Arbeit von Motz und Schwinger (5) über die Streuung thermischer Neutronen an Deuteronen, in der die Integralgleichung für die Eigenfunktion [vgl. Gleichung (24)] dadurch gelöst wird, daß sie durch eine endliche Zahl simultaner linearer algebraischer Gleichungen ersetzt wird. Allerdings muß dazu angenommen werden, daß sich die vollständige antisymmetrisierte Eigenfunktion des Systems in einen Produktansatz derart zerlegen läßt, daß die Eigenfunktion des Deuterons abgespalten werden kann. Das bedeutet, abgesehen von der Vernachlässigung der Polarisation, auch wieder eine Vernachlässigung in den Austauscheffekten zwischen den beiden Neutronen, wie ein einfacher Vergleich mit der in dieser Arbeit allgemein hergeleiteten Eigenfunktion lehrt [vgl. Gleichungen (11) und (13) in Verbindung mit Gleichung (16)]. Außerdem ist nicht berücksichtigt, daß die Eigenfunktion im Dublettfall in den Ortskoordinaten der gleichen Teilchen eine Kombination von symmetrischen und antisymmetrischen Funktionen sein muß, damit dem Deuteron exakt der Triplettzustand zugeordnet werden kann. Die Vernachlässigung von Motz und Schwinger bedeutet demnach, daß das Deuteron sich auch in einem Singulettzustand befinden könnte, was gegen die Erfahrung verstößt. Die Arbeit enthält also einige Ungenauigkeiten; außerdem bezieht sie sich nur auf thermische Neutronen, während wir beabsichtigen, den Verlauf des Wirkungsquerschnittes über ein größeres Intervall zu berechnen.

I. Teil

Berechnung der Eigenfunktion für das System Deuteron + freies Neutron

Die Berechnung der Eigenfunktion des Anfangszustandes ist eine für alle drei Prozesse gemeinsam zu lösende Aufgabe. Die Eigenfunktion muß durch Lösung der Schrödinger-Gleichung bestimmt werden. Da uns die Berechnung der Eigenfunktion des Endzustandes auf eine ähnliche Schrödinger-Gleichung führen wird, wie wir sie hier zu lösen haben, werden wir mit der Berechnung des Anfangszustandes bereits die bei der Integration der Schrödinger-Gleichung des Endzustandes auftretenden mathematischen Schwierigkeiten beseitigen können.

Das Verfahren zur Lösung der Schrödinger-Gleichung, das wir hier benutzen wollen, ist von Flügge (4) angegeben worden.

A. Ansatz für die Eigenfunktion und Aufstellung der Schrödinger-Gleichung

Ist 1 das Proton, 2 das im Deuteron gebundene und 3 das freie Neutron, so muß die Ortsfunktion φ (12,3) in 1 und 2 symmetrisch sein, wie es dem Grundzustand des Deuterons zukommt. Die Spins der Teilchen 1 und 2 sind nach Ausweis des Experimentes parallel; folglich ist die Spinfunktion σ symmetrisch. Die Ladungsfunktion ϱ schließlich ist antisymmetrisch in

1 und 2. Eine dem Pauli-Prinzip genügende, in allen drei Teilchen antisymmetrische Funktion gewinnt man daraus durch folgenden Ansatz:

$$\left.\begin{aligned}\Psi(A) = {} & \varphi(12,3)\,\sigma(\overline{12},3)\,\varrho(\overline{12},3)\\ & + \varphi(23,1)\,\sigma(23,1)\,\varrho(\overline{23},1)\\ & + \varphi(31,2)\,\sigma(31,2)\,\varrho(\overline{31},2)\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Der Spin des Deuterons möge in die z-Richtung fallen, dann kann sich der Spin des freien Teilchens dazu parallel (Gesamtspin $\frac{3}{2}$) oder antiparallel (Gesamtspin $\frac{1}{2}$) einstellen. Im ersten Fall liegt ein Quartett-, im zweiten Fall ein Dublettzustand vor. Die Spineigenfunktionen für diese Fälle sind:

$$\left.\begin{aligned}\text{Dublett}\quad & \sigma_D(12,3) = (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\,\alpha_3 - 2\,\alpha_1\alpha_2\beta_3\\ \text{Quartett}\quad & \sigma_{Q_1}(12,3) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\\ & \sigma_{Q_2}(12,3) = \alpha_1\alpha_2\beta_3 + \alpha_1\beta_2\alpha_3 + \beta_1\alpha_2\alpha_3\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Flügge benutzt als Quartettfunktion $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ wie wir, als Dublettfunktion schreibt er $\alpha_1\alpha_2\beta_3$, eine Funktion, die wohl den Gesamtspin $^1/_2$ hat, die aber eine Mischung aus σ_D und σ_{Q_2} darstellt. Für die Ladungsfunktion machen wir den Ansatz

$$\varrho(\overline{12},3) = (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,a_3\,. \quad (8)$$

Die so beschriebene Eigenfunktion $\Psi_D(A)$ und $\Psi_Q(A)$ setzen wir in die Schrödinger-Gleichung aller drei Teilchen ein:

$$T\Psi + V\Psi = E\Psi, \quad (9)$$

wobei T der Operator der kinetischen, V der der potentiellen Energie ist. Durch Anwendung des Operators $\Sigma\varrho(\overline{12},3)$ und $\Sigma\sigma_D(\overline{12},3)$ bzw. $\Sigma\sigma_Q(\overline{12},3)$ eliminieren wir Spin- und Ladungskoordinaten. Unter σ_Q soll hinfort stets die Funktion $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ verstanden werden. Die zweite Quartettfunktion liefert die gleichen Resultate, so daß sie vorläufig nicht mehr beachtet zu werden braucht. Durch Anwendung dieser Operatoren legen wir fest, daß 1 und 2 die im Deuteron gebundenen, 3 das freie Teilchen sein sollen. Danach enthält die Schrödinger-Gleichung nur noch Ortsvariable. Sie lautet für den Dublettzustand:

$$\left.\begin{aligned}T\cdot\Phi_D(\overline{12},3) & + (m+h+b+w)\,U_{12}\cdot\Phi_D(\overline{12},3)\\ & + \left(m-\tfrac{1}{2}(h+b)\right)U_{23}\Phi_D(\overline{31},2) + \left(w-\tfrac{1}{2}(h+b)\right)U_{23}\Phi_D(\overline{12},3) + \tfrac{1}{2}(h+b)\,U_{23}\Phi_D(\overline{23},1)\\ & + \left(m-\tfrac{1}{2}(h+b)\right)U_{31}\Phi_D(\overline{31},2) + \left(w-\tfrac{1}{2}(h+b)\right)U_{31}\Phi_D(\overline{12},3) + \tfrac{1}{2}(h+b)\,U_{31}\Phi_D(\overline{23},1)\\ & = E\Phi_D(\overline{12},3)\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

wobei

$$\Phi_D(\overline{12},3) = 4\,\varphi(12,3) + \varphi(23,1) + \varphi(\overline{31},2)\,. \quad (11)$$

Für den Quartettzustand ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}T\Phi_Q(\overline{12},3) & + (m+h+b+w)\cdot\Phi_Q(\overline{12},3)\,U_{12}\\ & + (m+h)\,U_{23}\Phi_Q(\overline{31},2) + (w+b)\,U_{23}\Phi_Q(12,3)\\ & + (m+h)\,U_{31}\Phi_Q(\overline{23},1) + (w+b)\,U_{31}\Phi_Q(\overline{12},3) = E\Phi_Q(\overline{12},3)\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

mit

$$\Phi_Q(\overline{12},3) = 2\,\varphi(\overline{12},3) - \varphi(\overline{23},1) - \varphi(\overline{31},2)\,. \quad (13)$$

Die Gleichungen (10) und (12) müssen gelöst werden[1]). Zur Lösung der Schrödinger-Gleichungen machen wir folgenden Produktansatz von φ:

$$\varphi(\overline{12},3) = g(|\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2|)\cdot f\left(\frac{\mathfrak{r}_1+\mathfrak{r}_2}{2} - \mathfrak{r}_3\right)\cdot e^{+i\mathfrak{k}\cdot\frac{\mathfrak{r}_1+\mathfrak{r}_2+\mathfrak{r}_3}{3}} \quad (14)$$

Während der letzte Faktor lediglich die Schwerpunktsbewegung bestimmt und somit für unser Problem uninteressant ist — wir werden ihn hinfort daher weglassen —, regelt der zweite Faktor die Bewegung des freien Teilchens in bezug auf das Deuteron, von dem angenommen wird, daß

1) Flügge verwechselte (vgl. Zitat 4, S. 557) Symmetrie der Eigenfunktion in bezug auf die Vertauschung von Teilchen mit der Symmetrie im Konfigurationsraum und unterließ die Weiterführung der Rechnung für den Quartettzustand. Bei antisymmetrischer Ortseigenfunktion ist aber sehr wohl Kugelsymmetrie der Eigenfunktion des freien Neutrons möglich.

es durch das einfallende Neutron, selbst wenn dieses in seine Nähe gerät, nicht angeregt wird (Vernachlässigung von Polarisationseffekten). $g(|\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_2|)$ ist die normierte Deuteroneigenfunktion für den Grundzustand:

$$g(|\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_2|)=N_g\cdot e^{-\alpha(\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_2)^2} \tag{15}$$

Unsere Aufgabe, die Eigenfunktion q zu bestimmen, ist nach diesem Ansatz dahingehend vereinfacht, daß jetzt noch die Funktion f als einzig unbekannter Bestandteil von q zu berechnen ist.

Als ein dem Problem angemessenes Koordinatensystem führen wir ein:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{r}&=\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_2\\ \mathfrak{R}&=\frac{\mathfrak{r}_1+\mathfrak{r}_2}{2}-\mathfrak{r}_3\\ \mathfrak{s}&=\frac{\mathfrak{r}_1+\mathfrak{r}_2+\mathfrak{r}_3}{3}\end{aligned}\right| \tag{16}$$

In diesen Koordinaten schreibt sich

$$\left.\begin{aligned}q(12,3)&=g(\mathfrak{r})\cdot f(\mathfrak{R})\cdot e^{+i\cdot\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{s}}\\ q(23,1)&=g\left(\mathfrak{R}-\frac{\mathfrak{r}}{2}\right)\cdot f\left(-\frac{\mathfrak{R}}{2}-\frac{3\mathfrak{r}}{4}\right)\cdot e^{+i\cdot\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{s}}\\ q(31,2)&=g\left(\mathfrak{R}+\frac{\mathfrak{r}}{2}\right)\cdot f\left(-\frac{\mathfrak{R}}{2}+\frac{3\mathfrak{r}}{4}\right)\cdot e^{+i\cdot\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{s}}\end{aligned}\right| \tag{17a}$$

$$\left.\begin{aligned}U_{12}&=U(\mathfrak{r})\\ U_{23}&=U\left(\mathfrak{R}-\frac{\mathfrak{r}}{2}\right)\\ U_{31}&=U\left(\mathfrak{R}+\frac{\mathfrak{r}}{2}\right)\end{aligned}\right| \tag{17b}$$

Der Operator für die kinetische Energie hat in diesen Koordinaten die Form

$$T=-\frac{\hbar^2}{2M}\left(\frac{3}{2}\Delta_{\mathfrak{R}}+2\Delta_{\mathfrak{r}}\right). \tag{18}$$

Die Schrödinger-Gleichungen für den Fall des Dubletts und des Quartetts schreiben sich nun:

Dublett:

$$\begin{aligned}&\left\{-\frac{\hbar^2}{2M}\left(\frac{3}{2}\Delta_{\mathfrak{R}}+2\Delta_{\mathfrak{r}}\right)-E+U(\mathfrak{r})\right.\\ &\quad+\left[w-\frac{1}{2}(h+b)\right]\cdot\left[U\left(\mathfrak{R}+\frac{\mathfrak{r}}{2}\right)+U\left(\mathfrak{R}-\frac{\mathfrak{r}}{2}\right)\right]\Bigg\}\cdot\left[4g(\mathfrak{r})\cdot f(\mathfrak{R})+g\left(\mathfrak{R}-\frac{\mathfrak{r}}{2}\right)\cdot f\left(-\frac{\mathfrak{R}}{2}-\frac{3\mathfrak{r}}{4}\right)\right.\\ &\qquad\left.+g\left(\mathfrak{R}+\frac{\mathfrak{r}}{2}\right)\cdot f\left(-\frac{\mathfrak{R}}{2}+\frac{3\mathfrak{r}}{4}\right)\right]\\ &\quad+\left\{\left[m-\frac{1}{2}(h+b)\right]U\left(\mathfrak{R}+\frac{\mathfrak{r}}{2}\right)+\frac{1}{2}(h+b)\,U\left(\mathfrak{R}-\frac{\mathfrak{r}}{2}\right)\right\}\cdot\left[4g\left(\mathfrak{R}-\frac{\mathfrak{r}}{2}\right)\cdot f\left(-\frac{\mathfrak{R}}{2}-\frac{3\mathfrak{r}}{4}\right)\right.\\ &\qquad\left.+g\left(\mathfrak{R}+\frac{\mathfrak{r}}{2}\right)\cdot f\left(-\frac{\mathfrak{R}}{2}+\frac{3\mathfrak{r}}{4}\right)+g(\mathfrak{r})\cdot f(\mathfrak{R})\right]\\ &\quad+\left\{\left[m-\frac{1}{2}(h+b)\right]U\left(\mathfrak{R}-\frac{\mathfrak{r}}{2}\right)+\frac{1}{2}(h+b)\,U\left(\mathfrak{R}+\frac{\mathfrak{r}}{2}\right)\right\}\cdot\left[4g\left(\mathfrak{R}+\frac{\mathfrak{r}}{2}\right)\cdot f\left(-\frac{\mathfrak{R}}{2}+\frac{3\mathfrak{r}}{4}\right)\right.\\ &\qquad\left.+g\left(\mathfrak{R}-\frac{\mathfrak{r}}{2}\right)\cdot f\left(-\frac{\mathfrak{R}}{2}-\frac{3\mathfrak{r}}{4}\right)+g(\mathfrak{r})\cdot f(\mathfrak{R})\right]=0.\end{aligned} \tag{19}$$

Quartett:

$$\begin{aligned}&\left\{-\frac{\hbar^2}{2M}\cdot\left(\frac{3}{2}\Delta_{\mathfrak{R}}+2\Delta_{\mathfrak{r}}\right)-E+U(\mathfrak{r})\right.\\ &\quad+[b+w]\cdot\left[U\left(\mathfrak{R}-\frac{\mathfrak{r}}{2}\right)+U\left(\mathfrak{R}+\frac{\mathfrak{r}}{2}\right)\right]\Bigg\}\cdot\left[2g(\mathfrak{r})\cdot f(\mathfrak{R})-g\left(\mathfrak{R}-\frac{\mathfrak{r}}{2}\right)\cdot f\left(-\frac{\mathfrak{R}}{2}-\frac{3\mathfrak{r}}{4}\right)\right.\\ &\qquad\left.-g\left(\mathfrak{R}+\frac{\mathfrak{r}}{2}\right)\cdot f\left(-\frac{\mathfrak{R}}{2}+\frac{3\mathfrak{r}}{4}\right)\right]\\ &\quad+[m+h]\cdot\left\{U\left(\mathfrak{R}-\frac{\mathfrak{r}}{2}\right)\cdot\left[2g\left(\mathfrak{R}+\frac{\mathfrak{r}}{2}\right)\cdot f\left(-\frac{\mathfrak{R}}{2}+\frac{3\mathfrak{r}}{4}\right)-g\left(\mathfrak{R}-\frac{\mathfrak{r}}{2}\right)\cdot f\left(-\frac{\mathfrak{R}}{2}-\frac{3\mathfrak{r}}{4}\right)-g(\mathfrak{r})\cdot f(\mathfrak{R})\right]\right.\\ &\quad\left.+U\left(\mathfrak{R}+\frac{\mathfrak{r}}{2}\right)\cdot\left[2g\left(\mathfrak{R}-\frac{\mathfrak{r}}{2}\right)\cdot f\left(-\frac{\mathfrak{R}}{2}-\frac{3\mathfrak{r}}{4}\right)-g\left(\mathfrak{R}+\frac{\mathfrak{r}}{2}\right)\cdot f\left(-\frac{\mathfrak{R}}{2}+\frac{3\mathfrak{r}}{4}\right)-g(\mathfrak{r})\cdot f(\mathfrak{R})\right]\right\}=0.\end{aligned} \tag{20}$$

Soll aus diesen Gleichungen die Funktion $f(\mathfrak{R})$ bestimmt werden, so ist die Variable $\mathfrak{r}$ zu eliminieren. Das tun wir dadurch, daß wir die Gleichung von links mit $g(\mathfrak{r})$ multiplizieren und über den ganzen $\mathfrak{r}$-Raum integrieren. Dabei ergibt das Glied

$$\int g(\mathfrak{r}) \cdot \left(-\frac{\hbar^2}{M} \Delta_{\mathfrak{r}} + U(\mathfrak{r})\right) g(\mathfrak{r})\, d\mathfrak{r}$$

gerade den Massendefekt des Deuterons $E_D = -2{,}3$ TME. Die dann auftretende Differenz

$$E - E_D = E' \tag{21}$$

ist die kinetische Energie der Relativbewegung der beiden Stoßpartner zueinander, bezogen auf den gemeinsamen Schwerpunkt. Wie man weiter unschwer nachrechnen kann, lassen sich diejenigen Integrale, die ineinander übergehen, wenn man $\mathfrak{r}$ durch $-\mathfrak{r}$ ersetzt, zusammenfassen. Es ist z. B.:

$$\int g^2(\mathfrak{r}) \cdot U\left(\mathfrak{R} + \frac{\mathfrak{r}}{2}\right) d\mathfrak{r} + \int g^2(\mathfrak{r}) \cdot U\left(\mathfrak{R} - \frac{\mathfrak{r}}{2}\right) d\mathfrak{r} = \int g^2(\mathfrak{r}) \cdot U\left(\mathfrak{R} + \frac{\mathfrak{r}}{2}\right) d\mathfrak{r}\,, \tag{22}$$

wobei

$$\int \ldots d\mathfrak{r} = \int_{\mathfrak{r}=-\infty}^{+\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \ldots \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, r^2 dr = 2 \int_{\mathfrak{r}=0}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \ldots \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, r^2 dr \tag{23}$$

sich von der üblichen Integration über den Raum nur dadurch unterscheidet, daß die Integration über $\mathfrak{r}$ bei $-\infty$ beginnt. Nach diesen Zusammenfassungen lauten die beiden Schrödinger-Gleichungen, in denen jetzt nur noch $\mathfrak{R}$ als Variable vorkommt:

Dublett:

$$\begin{aligned}
&\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \cdot \frac{3}{2} \Delta_{\mathfrak{R}} - E'\right] \cdot f(\mathfrak{R}) \\
&\quad + \frac{1}{4}\left[\int g(\mathfrak{r}) \cdot \left(-\frac{\hbar^2}{M} \Delta_{\mathfrak{r}} + U(\mathfrak{r})\right) \cdot g\left(\mathfrak{R} + \frac{\mathfrak{r}}{2}\right) \cdot f\left(-\frac{\mathfrak{R}}{2} + \frac{3\mathfrak{r}}{4}\right) d\mathfrak{r}\right. \\
&\qquad \left. - \left(\frac{\hbar^2}{2M} \frac{3}{2} \Delta_{\mathfrak{R}} + E\right) \cdot \int g(\mathfrak{r}) \cdot g\left(\mathfrak{R} + \frac{\mathfrak{r}}{2}\right) \cdot f\left(-\frac{\mathfrak{R}}{2} + \frac{3\mathfrak{r}}{4}\right) d\mathfrak{r}\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[2w - (h+b) + \frac{1}{2} m\right] \int g^2(\mathfrak{r}) \cdot U\left(\mathfrak{R} + \frac{\mathfrak{r}}{2}\right) d\mathfrak{r} \cdot f(\mathfrak{R}) \\
&\quad + \frac{1}{4}\left[w + (h+b) + m\right] \int g(\mathfrak{r}) \cdot U\left(\mathfrak{R} + \frac{\mathfrak{r}}{2}\right) \cdot g\left(\mathfrak{R} + \frac{\mathfrak{r}}{2}\right) \cdot f\left(-\frac{\mathfrak{R}}{2} + \frac{3\mathfrak{r}}{4}\right) d\mathfrak{r} \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} w - (h+b) + 2m\right] \int g(\mathfrak{r}) \cdot U\left(\mathfrak{R} - \frac{\mathfrak{r}}{2}\right) \cdot g\left(\mathfrak{R} + \frac{\mathfrak{r}}{2}\right) \cdot f\left(-\frac{\mathfrak{R}}{2} + \frac{3\mathfrak{r}}{4}\right) d\mathfrak{r} = 0\,.
\end{aligned} \tag{24}$$

Quartett:

$$\begin{aligned}
&\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \cdot \frac{3}{2} \Delta_{\mathfrak{R}} - E'\right] \cdot f(\mathfrak{R}) \\
&\quad - \frac{1}{2} \cdot \left[\int g(\mathfrak{r}) \cdot \left(-\frac{\hbar^2}{M} \cdot \Delta_{\mathfrak{r}} + U(\mathfrak{r})\right) \cdot g\left(\mathfrak{R} + \frac{\mathfrak{r}}{2}\right) \cdot f\left(-\frac{\mathfrak{R}}{2} + \frac{3\mathfrak{r}}{4}\right) d\mathfrak{r}\right. \\
&\qquad \left. - \left(\frac{\hbar^2}{2M} \cdot \frac{3}{2} \Delta_{\mathfrak{R}} + E\right) \int g(\mathfrak{r}) \cdot g\left(\mathfrak{R} + \frac{\mathfrak{r}}{2}\right) \cdot f\left(-\frac{\mathfrak{R}}{2} + \frac{3\mathfrak{r}}{4}\right) d\mathfrak{r}\right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot \left[2(b+w) - (m+h)\right] \cdot \int g^2(\mathfrak{r}) \cdot U\left(\mathfrak{R} + \frac{\mathfrak{r}}{2}\right) d\mathfrak{r} \cdot f(\mathfrak{R}) \\
&\quad - \frac{1}{2} \cdot \left[m + h + b + w\right] \cdot \int g(\mathfrak{r}) \cdot U\left(\mathfrak{R} + \frac{\mathfrak{r}}{2}\right) \cdot g\left(\mathfrak{R} + \frac{\mathfrak{r}}{2}\right) \cdot f\left(-\frac{\mathfrak{R}}{2} + \frac{3\mathfrak{r}}{4}\right) d\mathfrak{r} \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot \left[2(m+h) - (b+w)\right] \cdot \int g(\mathfrak{r}) \cdot U\left(\mathfrak{R} - \frac{\mathfrak{r}}{2}\right) \cdot g\left(\mathfrak{R} + \frac{\mathfrak{r}}{2}\right) \cdot f\left(-\frac{\mathfrak{R}}{2} + \frac{3\mathfrak{r}}{4}\right) d\mathfrak{r} = 0\,.
\end{aligned} \tag{25}$$

B. Lösung der Schrödinger-Gleichung

Zur Lösung der Schrödinger-Gleichung müssen die Integrale berechnet werden. Das ist nur möglich, wenn man einen

Ansatz für $f(\Re)$

zur Verfügung hat, der einige unbestimmte Konstanten enthält. Für große $\Re$ muß $f(\Re)$ durch eine ebene Welle dargestellt werden. In der Nähe des Deuterons wird diese ebene Welle verzerrt, und zwar um so mehr, je kleiner die kinetische Energie des Neutrons verglichen mit der Bindungsenergie des Neutrons an das Deuteron ist. Um auf einen Ansatz für die Eigenfunktion bei kleinem R geführt zu werden, betrachten wir das Problem an Hand des Schalenmodells, das für leichte Kerne den wahren Sachverhalt wohl am besten darstellt. Danach haben wir beim Dublettfall ein System, bei dem alle 3 Teilchen in ein 1 s-Niveau gesetzt werden können; denn Proton und Neutron unterscheiden sich durch die Ladungsquantenzahl, und die beiden Neutronen haben entgegengesetzten Spin, also verschiedene Spinquantenzahl. Alle 3 Teilchen können demnach in das niedrigste Niveau gesetzt werden, ohne daß man gegen das Pauli-Prinzip verstieße. Baut man die Eigenfunktion eines solchen Systems etwa in einem Heisenbergschen Oszillatorpotential auf, so hätte man zunächst (vgl. z. B. H. A. Bethe und R. F. Bacher, Rev. mod. Phys. 8, 172, 1936) für die Eigenfunktion zweier Teilchen

$$g = e^{-\alpha r^2},$$

wobei α ein Faktor ist, der im wesentlichen die Frequenz eines klassischen Oszillators der Masse M in einem gegebenen Potential enthält. Nimmt man für das dritte Teilchen den Schwerpunkt des Deuterons als Sitz eines anderen Hilfspotentials, dann wäre nach diesem Modell die Eigenfunktion des dritten Teilchens bezogen auf das Deuteron ebenso wie oben gegeben durch

$$f = e^{-\eta R^2}$$

mit einem anderen Faktor η, der durch das veränderte Potential bedingt ist. Also wäre

$$\varphi_{\text{Dublett}} = e^{-\alpha r^2} e^{-\eta R^2} \tag{26}$$

Anders ist es beim Quartett. Hier kann das zweite Neutron nicht mehr in eine 1 s-Schale eingebaut werden; denn hier sind die Spinkoordinaten der beiden Neutronen gleich, so daß sie notwendigerweise in den Ortskoordinaten verschieden sein müssen. Da mit dem Deuteron nur solche Neutronen in merkliche Wechselwirkung treten können, deren Drehimpulsquantenzahl $l = 0$ ist, müssen wir das freie Neutron in einem höheren s-Zustand annehmen. Für ein 2 s-Niveau lautet die Eigenfunktion des dritten Teilchens nach Bethe und Bacher:

$$f = e^{-\eta_l R^2} \cdot (1 - \tfrac{1}{3}\eta_l R^2),$$

also:

$$\varphi_{\text{Quartett}} = e^{-\alpha r^2} \cdot e^{-\eta_l R^2} \cdot (1 - \tfrac{1}{3}\eta_l R^2). \tag{27}$$

Nach diesen Überlegungen liegt es nahe, zur Lösung der Schrödinger-Gleichung für die Funktion f folgenden Ansatz zu machen:

$$f(R) = N_f \cdot (1 + \beta_2 R^2 + \beta_4 R^4) \cdot e^{-\eta_l R^2}, \tag{28}$$

wobei β_2, β_4 und η_l unbestimmt gelassen werden. N_f ist ein Normierungsfaktor. In die Entwicklung $\Sigma \beta_{2i} \cdot R^{2i}$ wurde das Glied mit R^4 noch hineingenommen, um eine Kontrolle zu haben, ob die Überlegungen in der obigen Form richtig sind, oder ob vielleicht noch höhere s-Zustände — immer nach diesem Modell — Einfluß haben; denn ein 3 s-Niveau würde ein Glied mit R^4, ein 4 s-Niveau mit R^6 usw. bewirken. Andererseits mußte die Reihe abgebrochen werden, da sonst die Rechnung zu unhandlich geworden wäre. Mit der Aufstellung des Ansatzes der Gleichung (28) tun wir so, als ob die Gleichungen (26) und (27) auch für höhere Energien des einfallenden Neutrons richtig wären. Das ist nun sicher nicht der Fall. Durch Variation der Konstanten werden wir Gleichung (28) der jeweils richtigen Eigenfunktion so gut wie möglich anzugleichen suchen. Trotzdem werden wahrscheinlich unsere Ergebnisse für höhere Energien nicht so gut sein wie für thermische.

Der obige Ansatz ist bereits von Flügge benutzt worden. Durch die vorstehende Überlegung sehen wir vielleicht seine physikalische Berechtigung und die Grenzen seiner Anwendbarkeit.

Um sicher zu gehen, wollen wir diesen Ansatz für f auch für den Dublettzustand benutzen. Wir sollten dann erwarten, daß die β_{2i} klein werden. Wir gewinnen auf diese Weise eine weitere Kontrolle.

Hiernach gehen wir über zur

Berechnung der Integrale.

Nach der Reihenfolge ihres Auftretens in den Gleichungen (24) und (25) bezeichnen wir sie mit $-\frac{\hbar^2}{M} \cdot J_1, J_2, J_3$ in der zweiten Zeile von Gleichung (24), J_4, J_5, J_6 in den folgenden. Am unangenehmsten ist das Integral J_1. Durch Anwendung des Greenschen Satzes und unter Be-

achtung von Gleichung (23) kann es in eine günstigere Fassung gebracht werden:

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= \int g(\mathfrak{r}) \cdot \Delta_{\mathfrak{r}} \left[g\left(\mathfrak{R} + \frac{\mathfrak{r}}{2}\right) \cdot f\left(-\frac{\mathfrak{R}}{2} + \frac{3\mathfrak{r}}{4}\right) \right] \cdot d\tau \\ &= \int \Delta_{\mathfrak{r}} g(\mathfrak{r}) \cdot g\left(\mathfrak{R} + \frac{\mathfrak{r}}{2}\right) \cdot f\left(-\frac{\mathfrak{R}}{2} + \frac{3\mathfrak{r}}{4}\right) \cdot d\tau \\ &\quad + \int g(\mathfrak{r}) \cdot \operatorname{grad}(g \cdot f) - \operatorname{grad} g(\mathfrak{r}) \cdot g \cdot f \cdot dO . \end{aligned}\right| \quad (29)$$

Das Oberflächenintegral verschwindet. Die Operation $\Delta_{\mathfrak{r}}\, g(\mathfrak{r})$ ist leicht ausführbar, da g lediglich von r abhängt. Danach wird in diesen wie in den übrigen Integralen die Substitution

$$-\frac{\mathfrak{R}}{2} + \frac{3\mathfrak{r}}{4} = \mathfrak{r}' \quad (30)$$

durchgeführt mit Ausnahme von J_4, wo wir

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}' \quad (31)$$

setzen. Dadurch wird die Integration über die Winkel elementar möglich. Die Integration über φ liefert den Faktor 2π. Das Integral über ϑ ist stets von folgendem Typ:

$$\int_0^{\pi} e^{-K(r',R)\cos\vartheta} \sin\vartheta \, d\vartheta = \frac{1}{K(r',R)} \left(e^{+K(r',R)} - e^{-K(r',R)} \right) \quad (32)$$

bei J_1 tritt außerdem noch folgendes Integral auf:

$$\int_0^{\pi} e^{-K(r',R)\cos\vartheta} \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta = \frac{-1}{K(r',R)} \left(e^{K(r',R)} + e^{-K(r',R)} \right) - \frac{1}{K^2(r',R)} \left(e^{K(r',R)} - e^{-K(r',R)} \right). \quad (33)$$

Nach Ausführung der Integration über die Winkel lauten die Integrale J_1 bis J_6:

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= -\left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot 4\pi \cdot N_y^2 \cdot N_f \frac{64}{9} \alpha^2 \cdot e^{-\frac{20}{9}\alpha R^2} \cdot \frac{1}{C_3} \cdot \{H_3^{(3)} + \beta_2 H_5^{(3)} + \beta_4 H_7^{(3)}\} + \left[-4\alpha + \frac{32}{9}\alpha R^2 \right] \cdot J_3 \\ J_2 &= -\left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot 4\pi \cdot N_y^2 \cdot N_f \cdot A \cdot e^{-\left(\frac{20}{9}\alpha + \frac{4}{9}b^2\right)R^2} \cdot \frac{1}{C_2} \cdot \{H_1^{(2)} + \beta_2 H_3^{(2)} + \beta_4 H_5^{(2)}\} \\ J_3 &= -\left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot 4\pi \cdot N_y^2 \cdot N_f \cdot e^{-\frac{20}{9}\alpha R^2} \cdot \frac{1}{C_3} \cdot \{H_1^{(3)} + \beta_2 H_3^{(3)} + \beta_4 H_5^{(3)}\} \\ J_4 &= -4\pi \cdot N_y^2 \cdot A \cdot e^{-b^2 R^2} \cdot \frac{1}{C_4} \cdot H_1^{(4)} \\ J_5 &= -\left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot 4\pi \cdot N_y^2 \cdot N_f \cdot A \cdot e^{-\left(\frac{20}{9}\alpha + \frac{16}{9}b^2\right)R^2} \frac{1}{C_5} \{H_1^{(5)} + \beta_2 H_3^{(5)} + \beta_4 H_5^{(5)}\} \\ J_6 &= -\left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot 4\pi \cdot N_y^2 \cdot N_f \cdot A \cdot e^{-\left(\frac{20}{9}\alpha + \frac{4}{9}b^2\right)R^2} \cdot \frac{1}{C_6} \cdot \{H_1^{(6)} + \beta_2 H_3^{(6)} + \beta_4 H_5^{(6)}\} . \end{aligned}\right| \quad (34)$$

Der Faktor $(\frac{4}{3})^3$ rührt her von der Transformation. Es ist zur Abkürzung gesetzt:

$$\left.\begin{aligned} H_i^{(k)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} r'^i e^{-D_k r'^2 - C_k r'} \, dr' \\ &= \frac{1}{2^{i-1}} \cdot \frac{1}{D_k} \sqrt{\frac{\pi}{D_k}} \cdot \frac{d^{i-1}}{d\left(\frac{C_k}{2}\right)^{i-1}} \left(\frac{C_k}{2} e^{+\left(\frac{C_k}{2}\right)^2 \frac{1}{D_k}} \right) \end{aligned}\right| \quad (35)$$

Im einzelnen ist:

$$\left.\begin{aligned} H_1^{(k)} &= -e^{-\frac{C_k^2}{4D_k}} \cdot \frac{C_k}{2D_k} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{D_k}} \cdot 1 \\ H_3^{(k)} &= -e^{-\frac{C_k^2}{4D_k}} \cdot \frac{C_k}{2D_k} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{D_k}} \left\{ \frac{3}{2D_k} + \left(\frac{C_k}{2D_k}\right)^2 \right\} \\ H_5^{(k)} &= -e^{-\frac{C_k^2}{4D_k}} \cdot \frac{C_k}{2D_k} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{D_k}} \cdot \left\{ \frac{15}{(2D_k)^2} + \frac{5}{D_k} \cdot \left(\frac{C_k}{2D_k}\right)^2 + \left(\frac{C_k}{2D_k}\right)^4 \right\} \\ H_7^{(k)} &= -e^{-\frac{C_k^2}{4D_k}} \cdot \frac{C_k}{2D_k} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{D_k}} \left\{ \frac{105}{(2D_k)^3} + \frac{105}{(4D_k)^2} \cdot \left(\frac{C_k}{2D_k}\right)^2 + \frac{21}{2D_k} \left(\frac{C_k}{2D_k}\right)^4 + \left(\frac{C_k}{2D_k}\right)^6 \right\} \end{aligned}\right| \quad (36)$$

$$H_i^{(k)} = -e^{-\frac{C_k^2}{4D_k}} \cdot \frac{C_k}{2D_k} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{D_k}} \cdot \overline{H}_i^{(k)} . \quad (36a)$$

Die C_k und D_k sind Abkürzungen für:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= C_3 & D_1 &= D_3 \\ C_2 &= 16/9 \cdot (2\alpha + b^2) R & D_2 &= 20/9 \cdot \alpha + 16/9 \cdot b^2 + \eta \\ C_3 &= 32/9 \cdot \alpha R & D_3 &= 20/9 \cdot \alpha + \eta \\ C_4 &= b^2 R & D_4 &= \alpha + b^2/4 \\ C_5 &= C_2 & D_5 &= 20/9 \cdot \alpha + 4/9 \cdot b^2 + \eta \\ C_6 &= 16/9 \cdot (2\alpha - \tfrac{1}{2} b^2) R & D_6 &= D_5 . \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Damit sind die Integrale bekannt.

Berechnung der Konstanten β_2, β_4 für thermische Energie des einfallenden Neutrons

η wird so bestimmt, daß die Exponenten in den 7 Gliedern der Schrödinger-Gleichung möglichst übereinstimmen. Diese Exponenten muten von vornherein recht verschiedenartig an. Sie lauten, abgesehen von dem allen Gliedern gemeinsamen Faktor R^2:

$$\left.\begin{aligned} E_0 &= -\eta \\ E_1 &= -20\alpha/9 + C_3^2/4\, D_3 R^2 \\ E_2 &= -20\alpha/9 + C_2^2/4\, D_2 R^2 - 4b^2/9 \\ E_3 &= -20\alpha/9 + C_3^2/4\, D_3 R^2 \\ E_4 &= -\eta + C_4^2/4\, D_4 R^2 - b^2 \\ E_5 &= -20\alpha/9 + C_5^2/4\, D_5 R^2 - 16b^2/9 \\ E_6 &= -20\alpha/9 + C_6^2/4\, D_6 R^2 - 4b^2/9 \end{aligned}\right\} \quad (38)$$

Nach einigen Umformungen lassen sie sich schreiben:

$$\left.\begin{aligned} E_0 &= -\eta \\ E_1 &= -\alpha - \eta/4 + (\alpha - 3\eta/4)^2/(5\alpha + 9\eta/4) \\ E_2 &= -\alpha - \eta/4 \\ &\quad + (\alpha - 3\eta/4)^2/(5\alpha + 4b^2 + 9\eta/4) \\ E_3 &= E_1 \\ E_4 &= -\eta - 4\alpha b^2/(4\alpha + b^2) \\ E_5 &= -\alpha - \eta/4 - b^2 + \frac{(\alpha + b^2 - 3\eta/4)^2}{5\alpha + b^2 + 9\eta/4} \\ E_6 &= -\alpha - \eta/4 - b^2 + \frac{(\alpha - b^2 - 3\eta/4)^2}{5\alpha + b^2 + 9\eta/4} \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

Bei dieser Darstellung sieht man leicht, daß durch die Festsetzung

$$\eta = 4\alpha/3 \quad (40)$$

$$E_0 = E_1 = E_2 = E_3 = -4\alpha/3 \quad (41)$$

wird. Weiter wird

$$E_4 = -4\alpha/3 - \frac{4\alpha b^2}{4\alpha + b^2} \quad (42)$$

und

$$E_5 = E_6 = -4\alpha/3 - \frac{8\alpha b^2}{8\alpha + b^2} . \quad (43)$$

Leider ist es nicht möglich, η so zu wählen, daß alle Exponenten gleich werden. Zur Bestimmung von β_2 und β_4 müssen die Exponentialfaktoren beseitigt werden. Das kann durch Division der Gleichung mit $\exp(-4\alpha R^2/3)$ nun nur teilweise geschehen. Im vierten Gliede bleibt der Faktor $\exp(-4\alpha b^2 R^2/(4\alpha + b^2))$, im fünften und sechsten der Faktor $\exp(-8\alpha b^2 R^2/(8\alpha + b^2))$ stehen. Diese Faktoren müssen daher bis zum Gliede mit R^4 entwickelt werden. Das bedeutet einen Fehler, der jedoch nicht sehr groß ist; denn der Faktor von R^2 ist von der Größenordnung 1, so daß eine Entwicklung bis zum dritten Gliede die e-Funktion für nicht zu große R recht gut approximiert. Da die hier entwickelten Teile des exponentiellen Faktors nur durch das Potential bedingt sind, bedeutet die Ersetzung durch die ersten Glieder der Reihe physikalisch, daß nicht das Potential

$$U = -A \cdot e^{-b^2 r^2} ,$$

sondern eine leichte Variante dieses Potentials für unser Problem zugrunde gelegt wird.

Wenn man nun in den Schrödinger-Gleichungen (24) und (25) die Δ-Operatoren ausrechnet, dann die Gleichung durch $N_f \cdot \exp(-4\alpha R^2/3)$ dividiert und die restlichen Exponentialausdrücke entwickelt, so erhält man ein Polynom in R, aus dem β_2 und β_4 berechnet

werden müssen. Bei diesem Stand der Rechnung lautet die Schrödinger-Gleichung für den Dublettzustand:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{3}{4}\frac{\hbar^2}{M}\cdot\left[(6\beta_2-6\eta_l)+(20\beta_4-14\eta_l\beta_2+4\eta_l^2)R^2+(-22\eta_l\beta_4+4\eta_l^2\beta_2)R^4\right]\\
&-E'\cdot\left[1+\beta_2\cdot R^2+\beta_4\cdot R_4\right]\\
&-\frac{1}{4}\cdot\left[\left(-4\alpha+\frac{32}{9}\alpha^2R^2\right)\frac{\hbar^2}{M}\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\pi\cdot N_g^2\cdot\frac{1}{2D_3}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{D_3}}\cdot\left\{\overline{H}_1^3+\beta_2\overline{H}_3^3+\beta_4\overline{H}_5^3\right\}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\hbar^2}{M}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdot 4\alpha\cdot 4\pi N_g^2\cdot\frac{1}{2D_3}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{D_3}}\cdot\left\{\overline{H}_3^3+\beta_2\overline{H}_5^3+\beta_4\overline{H}_7^3\right\}\right]\\
&-\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{3}{4}\frac{\hbar^2}{M}\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdot 4\pi\cdot N_g^2\cdot\frac{1}{2D_3}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{D_3}}\cdot\left\{(6\beta_2'-6\eta\beta_0')\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+(20\beta_4'-14\eta\beta_2'+4\eta^2\beta_0')\cdot R^2+(-22\eta\beta_4'+4\eta^2\beta_2')R^4\right\}\right]\\
&-\frac{1}{4}\cdot\left[\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdot 4\pi\cdot N_g^2\cdot A\cdot\frac{1}{2D_2}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{D_2}}\cdot\left\{\overline{H}_1^2+\beta_2\overline{H}_3^2+\beta_4\overline{H}_5^2\right\}\right]\\
&-\frac{1}{4}\cdot\left[\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdot 4\pi\cdot N_g^2\cdot E\cdot\frac{1}{2D_3}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{D_3}}\cdot\left\{\overline{H}_1^3+\beta_2\overline{H}_3^3+\beta_4\overline{H}_5^3\right\}\right]\\
&-\frac{1}{4}\cdot[m+h+b+w]\cdot\left[\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdot 4\pi\cdot N_g^2\cdot A\cdot\frac{1}{2D_5}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{D_5}}\cdot\left\{\overline{H}_1^5+\beta_2\overline{H}_3^5+\beta_4\overline{H}_5^5\right\}\cdot\right.\\
&\qquad\left.\cdot\left\{1-\frac{1}{1!}\cdot\frac{8\alpha b^2}{8\alpha+b^2}\cdot R^2+\frac{1}{2!}\left(\frac{8\alpha b^2}{8\alpha+b^2}\right)^2R^4\right\}\right]\\
&-\frac{1}{2}\left[2m-(h+b)+\frac{1}{2}w\right]\cdot\left[\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdot 4\pi\cdot N_g^2\cdot A\cdot\frac{1}{2D_6}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{D_6}}\cdot\left\{\overline{H}_1^6+\beta_2\overline{H}_3^6+\beta_4\overline{H}_5^6\right\}\cdot\right.\\
&\qquad\left.\left.\cdot\left\{1-\frac{1}{1!}\cdot\frac{8\alpha b^2}{8\alpha+b^2}\cdot R^2+\frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{8\alpha b^2}{8\alpha+b^2}\right)^2R^4\right\}\right]\right]=0
\end{aligned}
\tag{44}
$$

Ähnlich würde die Gleichung für den Quartettzustand aussehen. Zur Abkürzung der Gleichung ist erstens die zweite Zeile der Gleichung (24) fortgelassen, da

$$2w-(h+b)+m/2=0, \tag{45}$$

zweitens in der sechsten Zeile folgende neue Bezeichnung benutzt:

$$
\left.
\begin{aligned}
\beta_0' &= 1+\frac{3}{2D_3}\beta_2+\frac{15}{(2D_3)^2}\beta_4\\
\beta_2' &= \left(\frac{C_3}{2D_3R}\right)^2\beta_2+\frac{5}{D_3}\left(\frac{C_3}{2D_3R}\right)^2\beta_4\\
\beta_4' &= \left(\frac{C_3}{2D_3R}\right)^4\beta_4.
\end{aligned}
\right\} \tag{46}
$$

Soll die Gleichung (44) für jeden Wert von R erfüllt sein, so müssen die Faktoren jeder Potenz von R für sich verschwinden. Aus dieser Forderung lassen sich β_2 und β_4 bestimmen, wenn man die Potentialkonstanten A, b und die Konstanten der Deuteroneigenfunktion N_g, α kennt. Für die Potentialkonstanten wurden die Werte

$$
\begin{aligned}
b &= 1\\
A &= 28{,}5
\end{aligned}
\tag{47}
$$

gewählt. Wir benutzen als Einheit der Energie 1 TME. (1 TME = 0,928 MeV), als Einheit der Länge 1 Elektronenradius $e^2/mc^2 = 2{,}81 \cdot 10^{-13}$ cm².

Die Eigenfunktion für den Deuterongrundzustand muß im Potential der Gleichung (8) durch numerische Integration der zugehörigen Schrödinger-Gleichung bestimmt werden. Nach einer unveröffentlichten Rechnung von v. Weizsäcker läßt sich die wahre Eigenfunktion durch die Gauß-Funktion

$$g(r) = N_g\cdot e^{-\alpha r^2} \tag{48}$$

approximieren, wenn man

$$\alpha = 0{,}65 \tag{49}$$

setzt. Für den Normierungsfaktor erhält v. Weizsäcker

$$N_g = 0{,}4 \tag{50}$$

Für die Normierung ist nicht, wie im allgemeinen aus Gründen der mathematischen Einfachheit üblich, die Gauß-Funktion zugrunde gelegt, sondern es wurden, wie es bei strenger Behandlung des Problems notwendig ist, die numerisch berechneten Werte derjenigen Funktion benutzt, die die Schrödinger-Gleichung erfüllt. Es ergeben sich hierdurch in den Konstanten Abweichungen von 20—30 Proz. gegenüber den Werten, die aus dem Näherungsverfahren berechnet und bisher meist benutzt wurden. Für die Konstanten der Funktion f erhält man nun, zunächst für den Fall thermischer Energie des einfallenden Neutrons ($E' = 0$),

im Dublettfall:

$$\left.\begin{aligned}\beta_2 &= -\,0{,}0327\\ \beta_4 &= +\,0{,}0072\end{aligned}\right\} \qquad (51\,a)$$

$$f = N_f \cdot (1 - 0{,}0327 \cdot R^2 + 0{,}0072 \cdot R^4) \cdot e^{-0{,}87 R^2} \qquad (52\,a)$$

im Quartettfall:

$$\left.\begin{aligned}\beta_2 &= +\,1{,}016\\ \beta_4 &= +\,0{,}952\end{aligned}\right\} \qquad (51\,b)$$

$$f = N_f \cdot (1 + 1{,}016 \cdot R^2 + 0{,}952 \cdot R^4) \cdot e^{-0{,}87 R^2} \qquad (52\,b)$$

Im Dublettfall ist der Verlauf der Funktion f praktisch allein durch die Gauß-Funktion bestimmt. Das ist sehr gut im Einklang mit den Überlegungen am Schalenmodell. Weniger eindeutig dagegen ist das Ergebnis beim Quartettzustand. Man muß hier annehmen, daß höhere s-Zustände wesentlichen Beitrag liefern. Vor allem müssen sie das positive Vorzeichen von β_2 bewirken, was z. B. schon beim Oszillatorpotential durch Überlagerung eines 2 s- und eines 3 s-Zustandes entstehen kann. Immerhin ist die Größenordnung der β_{2i} auch beim Quartettzustand gut im Einklang mit dem Modell. Das Maximum der Quartettfunktion bei $R = 1{,}25$ ist zu verstehen als Ausdruck für die abstoßenden Kräfte kurzer Reichweite, die zwischen Neutronen mit gleichem Spin nach dem Pauli-Prinzip herrschen.

Den Verlauf der Eigenfunktion zeigt anschaulich Fig. 1. Zum Vergleich ist in Fig. 2 der Verlauf des Potentials gezeichnet.

Für große R muß f übergehen in die Eigenfunktion eines freien Teilchens $\sin(kR + \delta)/kR\sqrt{V}$. Problematisch ist die Wahl der Anschlußstelle R_0, da von ihr die Phase δ der einfallenden Welle und der Normierungsfaktor N_f merklich abhängen. Die Quartettfunktion hat ein Maximum bei $R_0 = 1{,}25$; das Potential, das in der Gegend von $R = 2$ nahezu abgeklungen ist, hat also hier im Gegensatz zur Eigenfunktion des Dublettzustandes einen Einfluß noch bei relativ großen R. Es scheint daher am richtigsten, die asymptotische Lösung der Quartettfunktion etwa bei $R_0 = 2$, die der Dublettfunktion bei $R_0 = 1{,}5$ anzuschließen[1]). Zum Vergleich sind die Rechnungen für beide Zustände sowohl für $R_0 = 1{,}5$ wie für $R_0 = 2$ durchgeführt. Aus den Anschlußbedingungen bestimmt man

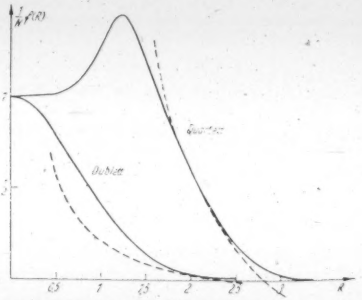


Fig. 1. Der Verlauf der Eigenfunktion $f(R)$ bei kleinen R. Bei $R = 2$ Anschluß an die für große R gültige Eigenfunktion.

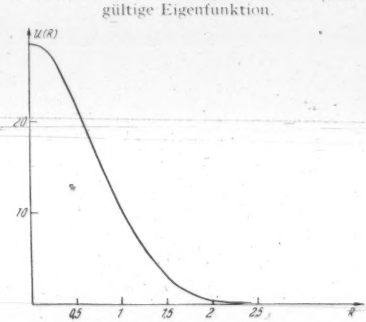


Fig. 2. Der Verlauf des Potentials $U = 28{,}5 \cdot e^{-R^2}$.

den Normierungsfaktor von f. Da wir einen Kontinuumzustand normieren müssen, setzen wir

$$N_f = \frac{n_k}{k\sqrt{V}} = \frac{N_f'}{V^{1/2}}. \qquad (53)$$

Dann erhält man N_f' aus

$$N_f'^2 = \frac{e^{2\eta R_0^2}}{k^2 R_0^2 \cdot P^2(R_0) + Q^2(R_0)} \qquad (54)$$

wobei

$$P(R) = 1 + \beta_2 R^2 + \beta_4 R^4 \qquad (55)$$

$$Q(R) = 1 + (3\beta_2 - 2\eta) R^2 + (5\beta_4 - 2\eta\beta_2) R^4. \qquad (56)$$

1) Erschwerend kommt hinzu, daß β_{2i} mit der Energie variiert, so daß auch die Anschlußstelle eine Funktion der Energie wird. Doch die hierdurch bedingte Veränderlichkeit von R_0 ist auf ein Intervall beschränkt, daß klein ist gegenüber der Ungenauigkeit, mit der die Anschlußstelle bei vorgegebener Energie festgelegt werden kann.

Für Quartett- und Dublettfall erhält man

$$\left.\begin{array}{ll} \text{bei } R_0 = 1{,}5\text{:} & N_f' = 0{,}36 \\ & N_f' = 2{,}60 \\ \text{bei } R_0 = 2\text{:} & N_f' = 0{,}57 \\ & N_f' = 6{,}40 \end{array}\right\} \quad (57)$$

Die Abhängigkeit von $f(R)$ von der Energie des einfallenden Neutrons

Ist $E' \neq 0$, so ist zur Bestimmung der β ein Gleichungssystem von der Form

$$\left.\begin{array}{l} (A_{11} + a_{11}E') + (A_{21} + a_{21}E') \cdot \beta_2 + (A_{31} + a_{31}E') \cdot \beta_4 = 0 \\ (A_{12} + a_{12}E') + (A_{22} + a_{22}E') \cdot \beta_2 + (A_{32} + a_{32}E') \cdot \beta_4 = 0 \\ (A_{13} + a_{13}E') + (A_{23} + a_{23}E') \cdot \beta_2 + (A_{33} + a_{33}E') \cdot \beta_4 = 0 \end{array}\right\} \quad (58)$$

zu lösen. Da $a_{ik} \ll A_{ik}$, werden bei der Lösung dieses Systems alle zweiten und höheren Potenzen von E' vernachlässigt. Man erhält so

für den Dublettzustand:

$$\left.\begin{array}{l} \beta_2 = -0{,}0322 - 0{,}0252 \cdot E' \\ \beta_4 = +0{,}0072 - 0{,}016 \cdot E' \end{array}\right\} \quad (59)$$

für den Quartettzustand:

$$\left.\begin{array}{l} \beta_2 = +1{,}016 + 0{,}039 \cdot E' \\ \beta_4 = +0{,}952 + 0{,}028 \cdot E' \end{array}\right\} \quad (60)$$

Entsprechend wird bei der Berechnung von N' verfahren. Das Ergebnis ist in der Tabelle 1 zusammengestellt.

Tabelle 1

	E'	0	1/2	1	3/2	3	4	6	8
$R_0 = 1{,}5$	N'_{Dublett}	2,60	2,55	2,53	2,54	2,56	2,58	2,60	2,54
	N'_{Quartett}	0,36	0,35	0,34	0,34	0,32	0,31	0,29	0,27
$R_0 = 2$	N'_{Dublett}	6,40							
	N'_{Quartett}	0,57	0,55	0,54	0,53	0,51	0,50	0,47	0,45

Damit ist uns die Eigenfunktion für den Anfangszustand restlos bekannt.

II. Teil

Berechnung der Wirkungsquerschnitte

A. Der Streuquerschnitt

Am einfachsten berechnen wir nun den Wirkungsquerschnitt für die Streuung der Neutronen an Deuteronen. Wir haben zu dem Zweck lediglich die Phase der einfallenden Welle für große R zu berechnen und gewinnen dann den Wirkungsquerschnitt nach der bekannten Formel

$$\sigma = 4\pi \cdot \frac{\sin^2 \delta}{k^2} \quad (61)$$

Aus der Anschlußbedingung folgt (R_0 = Anschlußstelle)

$$\delta = -kR_0 + \operatorname{arctg}[kR_0 \cdot P(R_0)/Q(R_0)] \quad (62)$$

und man erhält für den Wirkungsquerschnitt für Neutronen verschiedener Energie E_N bezogen auf das ruhende Deuteron ($E_N = \frac{3}{2}E'$).

Tabelle 2

	E_N	0	0,75	1,5	2,25	3	
$R_0 = 1{,}5$	σ_{Dublett}	4,11	2,92	2,50	2,19	2,00	$\cdot 10^{-24}$ cm²
	σ_{Quartett}	0,77	0,76	0,75	0,74	0,73	$\cdot 10^{-24}$ cm²
$R_0 = 2$	σ_{Dublett}	5,65	4,04	3,20	2,52	2,01	$\cdot 10^{-24}$ cm²
	σ_{Quartett}	1,60	1,52	1,45	1,38	1,31	$\cdot 10^{-24}$ cm²

Es fällt auf, daß der Wirkungsquerschnitt im Dublettfall bei höheren Energien 2—3mal, bei niederen Energien sogar 4—5mal größer ist als beim Quartettfall. Das ist dadurch zu erklären, daß bei höheren s-Zuständen die Wechselwirkung der Teilchen untereinander nicht so groß ist wie beim Zustand $s = 0$. Der Effekt sollte mit zunehmender Energie der Teilchen abnehmen, da dann die Differenz der Wechselwirkungsenergie zwischen Teilchen mit $s = 0$ und solchen mit höheren s-Zuständen klein gegen die Gesamtenergie der Teilchen wird. Das Resultat entspricht der Erwartung.

Mit den Ergebnissen der Tabelle 2 ergibt sich der beobachtbare Wirkungsquerschnitt entsprechend den Gewichtsfunktionen von $^1/_3$ für

den Dublettzustand und $^2/_3$ für den Quartettzustand aus

$$\sigma = \tfrac{1}{3}\,\sigma_{\text{Dublett}} + \tfrac{2}{3}\,\sigma_{\text{Quartett}}. \qquad (63)$$

Den Verlauf des Wirkungsquerschnitts σ mit steigender Energie des einfallenden Neutrons zeigt Fig. 3.

Zum Vergleich der theoretisch gewonnenen Ergebnisse mit der Erfahrung müssen wir berücksichtigen, daß die experimentellen Daten nicht an freien, sondern an etwa im Molekül D_2O

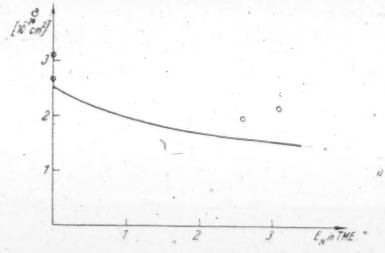


Fig. 3. Wirkungsquerschnitt für elastische Streuung in Abhängigkeit von der Neutronenenergie. — Die Kreise bezeichnen Meßergebnisse.

gebundenen Deuteronen gewonnen sind. Da die kinetische Energie thermischer Neutronen klein ist gegen die Bindungsenergie, gibt das stoßende Teilchen nahezu keinen Impuls an das Deuteron, sondern nur an das ganze Molekül ab. Die reduzierte Masse des Systems wird dadurch praktisch gleich der Neutronenmasse M, während sie in den Rechnungen mit $2M/3$ eingesetzt ist. Da die Wirkungsquerschnitte proportional dem Quadrat der Masse sind, ist der experimentelle Wert für thermische Neutronen mit dem Faktor $^4/_9$ zu multiplizieren. Für den Wirkungsquerschnitt thermischer Neutronen liegen drei Messungen vor. Zwei ältere von Dunning und Mitarbeitern (6) und Goldhaber und Briggs (7) und eine neuere von Dunning und Carroll (unveröffentlicht, zitiert bei Motz und Schwinger (5)). In der ersten Arbeit ist der Querschnitt mit $4 \cdot 10^{-24}$ cm², in der zweiten mit $7 \cdot 10^{-24}$ cm² und in der letzten schließlich mit $5{,}7 \cdot 10^{-24}$ cm² bestimmt. Auf freie Neutronen umgerechnet, sind das 1,8, 3,1 und $2{,}6 \cdot 10^{-24}$ cm². Für schnelle Neutronen existieren Messungen von Dunning und Mitarbeitern (6), Kikuchi und Aoki (8) und von Zinn, Seely und Cohen (9). Zinn, Seely und Cohen benutzten Neutronen der Energie 2,88 MeV = 3,10 TME und bekamen einen Wirkungsquerschnitt von $(2{,}17 \pm 0{,}08) \cdot 10^{-24}$ cm². Die Neutronen von Kikuchi und Aoki hatten eine Energie von 2,40 MeV = 2,60 TME. Der Wirkungsquerschnitt wurde mit $(1{,}98 \pm 0{,}10) \cdot 10^{-24}$ cm² gemessen. Außerdem benutzten Kikuchi und Aoki noch Neutronen der $Li + D$-Reaktion, die ein heterogenes Spektrum haben, das nach Fleischmann (10) hinauf reicht bis zu 17 MeV. Hier erhielten sie ebenso wie Dunning und Mitarbeiter für den Wirkungsquerschnitt $1{,}68 \cdot 10^{-24}$ cm². Abgesehen von der älteren und wohl inzwischen überholten Dunningschen Messung für thermische Neutronen liegen alle experimentellen Messungen recht gut zu dem Ergebnis unserer Rechnung (vgl. Fig. 3). Demgegenüber verläuft der Wirkungsquerschnitt nach Schiff ohne Berücksichtigung des Austauscheffektes von 3,5 (thermische Energie) bis $1{,}3 \cdot 10^{-24}$ cm² (3 MeV) nahezu linear; das Ergebnis von Flügge liegt um $1 \cdot 10^{-24}$ cm², während Motz und Schwinger für thermische Energien unter Benutzung des Potentials der Gleichung (1) mit etwas veränderten Konstanten $6{,}91 \cdot 10^{-24}$ cm² erhalten.

B. Einfang des Neutrons

1. Die Eigenfunktion des Tritons

Unter Aussendung eines Lichtquants kann das Neutron vom Deuteron eingefangen werden:

$$D + n = H^3 + \gamma.$$

Das Triton hat den Spin $^1/_2$. Die Spins der Neutronen werden also antiparallel gerichtet sein. Demzufolge lautet die Spinfunktion des Endzustandes entweder

$$\sigma(1,\overline{23}) = \alpha_1(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2) - 2\,\beta_1\alpha_2\alpha_3 \qquad (64)$$

oder

$$\sigma(1,\widehat{23}) = \alpha_1(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) \qquad (65)$$

In der Mehrzahl aller Arbeiten über H^3 und He^3 ist lediglich die zweite Form benutzt. Die Ortsfunktion wurde dann entsprechend symmetrisch in den Teilchen 2 und 3 angenommen. Das würde dem Schalenmodell entsprechen; beide Neutronen sind in einer 1 S-Schale. Wie wohl zuerst von Rarita und Present (11) bemerkt worden ist, reicht aber diese Eigenfunktion nicht aus, sobald man spinabhängige Kernkräfte annimmt. Der Operator in Gleichung (2) z. B. bewirkt Übergang zwischen den Gleichungen (64) und (65). Man wird daher eine Linearkombination annehmen müssen, in der einmal Gleichung (64), zum anderen Gleichung (65) als Spinfunktion eingesetzt ist. Die Eigenfunktion müßte daher folgendermaßen aussehen:

$$\left.\begin{aligned}\Psi(H^3) = {} & [k_1 \cdot \psi(1,\widehat{23}) \cdot \sigma(1,\widehat{23}) + k_2 \cdot \psi(1,\widehat{23}) \cdot \sigma(1,\widehat{23})] \cdot b_1 a_2 a_3 \\ & + [k_1 \cdot \psi(2,\widehat{31}) \cdot \sigma(2,\widehat{31}) + k_2 \cdot \psi(2,\widehat{31}) \cdot \sigma(2,\widehat{31})] \cdot b_2 a_3 a_1 \\ & + [k_1 \cdot \psi(3,\widehat{12}) \cdot \sigma(3,\widehat{12}) + k_2 \cdot \psi(3,\widehat{12}) \cdot \sigma(3,\widehat{12})] \cdot b_3 a_1 a_2\end{aligned}\right\} \qquad (66)$$

k_1 und k_2 sind Gewichtsfaktoren. Betrachten wir die in den Neutronenörtern antisymmetrische Eigenfunktion auf Grund des Schalenmodells, so kommen wir zu einem Widerspruch: Da nämlich die Spins antiparallel sind, können beide Neutronen in ein 1 S-Niveau gesetzt werden. Eine antisymmetrische Funktion zweier Teilchen, die beide durchweg gleiche Quantenzahlen haben, muß jedoch verschwinden. Wenn die vorstehenden Überlegungen etwas anderes fordern, so deutet das darauf hin, daß bereits beim Triton das Schalenmodell versagt. Andere Auswege bestünden darin, daß man den Kraftansatz der Gleichung (2) verwirft oder die nichtrelativistische Näherung, in der der Spin einfach als vierte Koordinate berücksichtigt wird, für ungenügend hält. Doch wollen wir davon absehen und statt dessen, soweit wir vom Schalenmodell reden, so tun, als ab sich das zweite Neutron etwa in einem höheren s-Zustand befände. In Gleichung (66) bestimmen wir die Faktoren k_1 und k_2 durch die Forderung, daß keines der beiden Neutronen in seiner Wechselwirkung mit dem Proton ausgezeichnet werden soll. Dann muß die Eigenfunktion

$$\left.\begin{aligned} &k_1\,\psi(1,\overline{23})\cdot\alpha_1(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\\ &+k_2\,\psi(1,\overline{23})\cdot[\alpha_1(\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2)-2\,\beta_1\alpha_2\alpha_3]\end{aligned}\right\}\quad(66a)$$

durch eine Linearkombination von $\varphi(\overline{12},3)\,\sigma(\overline{12},3)$ und $\varphi(\overline{31},2)\,\sigma(\overline{31},2)$ darzustellen sein, wobei die Symmetrieeigenschaften durch den Grundzustand des H^3 bedingt werden. $\sigma(\overline{12},3)$ ist eine in 1 und 2 symmetrische Dublettfunktion, da die Spins von 1 und 2 parallel anzusetzen sind. Damit keines der beiden Neutronen ausgezeichnet und die Gesamtfunktion antisymmetrisch wird, muß die Linearkombination lauten:

$$\varphi(\overline{13},2)\,\sigma(\overline{13},2)-\varphi(\overline{12},3)\,\sigma(\overline{12},3)\,. \qquad (67)$$

Hieraus ergibt sich dann $k_1=\,^3/_2$ und $k_2=-\,^1/_2$, und wir erhalten für die Gesamteigenfunktion des Endzustandes die Darstellung:

$$\left.\begin{aligned}\Psi_D=&\{\tfrac{1}{2}[\varphi(\overline{31},2)+\varphi(\overline{12},3)]\cdot\alpha_1(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\\&-\tfrac{1}{2}[\varphi(\overline{31},2)-\varphi(\overline{12},3)]\cdot[\alpha_1(\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2)-2\,\beta_1\alpha_2\alpha_3]\}b_1a_2a_3\\&+\{+\tfrac{3}{2}[\varphi(\overline{12},3)+\varphi(\overline{23},1)]\cdot\alpha_2(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)\\&-\tfrac{1}{2}[\varphi(\overline{12},3)-\varphi(\overline{23},1)]\cdot[\alpha_2(\alpha_3\beta_1+\alpha_1\beta_3)-2\,\beta_2\alpha_3\alpha_1]\}b_2a_3a_1\\&+\{+\tfrac{3}{2}[\varphi(\overline{23},1)+\varphi(\overline{31},2)]\cdot\alpha_3(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\\&-\tfrac{1}{2}[\varphi(\overline{23},1)-\varphi(\overline{31},2)]\cdot[\alpha_3(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)-2\,\beta_3\alpha_1\alpha_2]\}b_3a_1a_2\end{aligned}\right\}\quad(68)$$

Diese Gleichung entspricht genau dem Ansatz für die Eigenfunktion des Anfangszustandes [vgl. die Gleichungen (6), (7), (8)]. Wir können danach für die Endfunktion die Rechnungen für die Anfangsfunktion zugrunde legen, wenn wir in der Schrödinger-Gleichung E durch die Bindungsenergie $-\varepsilon$ ersetzen ($\varepsilon=9$ TME) und die Konstanten des Polynoms $P(R)$ für diese Energie neu berechnen. Man erhält:

$$\left.\begin{aligned}\beta_2&=0{,}141\\ \beta_4&=0{,}140\,,\end{aligned}\right\}\quad(69)$$

so daß die Ortseigenfunktion (12,3) für den Endzustand lautet:

$$\varphi(\overline{12},3)=N_T(1+0{,}141\cdot R^2+0{,}140\cdot R^4)\,e^{-\eta R_1-\alpha r_1}\qquad(70)$$

mit

$$N_T=0{,}101\,. \qquad (71)$$

2. Der Einfangprozeß

Jeder Einfang von Teilchen geschieht durch den Mechanismus eines elektrischen oder magnetischen Dipols, der die frei werdende Energie in Form eines γ-Quants ausstrahlt. Bei jedem Übergang ändert sich die Rotationsquantenzahl um 1. Daher muß das Gesamtdrehmoment des Endzustandes von dem des Anfangszustandes um 1 verschieden sein. Der Endzustand ist der Grundzustand des H^3. Er hat das Bahnmoment 0 und und Spinmoment $^1/_2$. Wir könnten also den Anfangszustand mit dem Bahnmoment 1 und dem Spinmoment $^1/_2$ ansetzen. In diesem Fall müßten wir das freie Neutron in einem P-Zustand annehmen: Die Ausstrahlung erfolgte durch einen elektrischen Dipol. Diesen Anfangszustand können wir von vornherein außer acht lassen, da das P-Neutron gar nicht in die für eine merkliche Wechselwirkung notwendige Kernnähe kommt. Wir müssen also dem Anfangszustand das Bahnmoment 0 geben und können der Auswahlregel für die Rotationsquantenzahl nur durch das Spinmoment gerecht werden: Der Einfang erfolgt unter Ausstrahlung durch einen magnetischen Dipol. Die nachfolgende Zusammenstellung gibt eine Übersicht über die Übergangsmöglichkeiten.

Spinmoment des Endzustandes	$+^1/_2$ Dublett	$+^1/_2$ Dublett	$+^1/_2$ Dublett	$-^1/_2$ Dublett	$-^1/_2$ Dublett	$-^1/_2$ Dublett
Spinmoment des Anfangszustandes	$+^3/_2$ Quartett	$-^1/_2$ Quartett	$-^1/_2$ Dublett	$+^1/_2$ Dublett	$+^1/_2$ Quartett	$-^1/_2$ Quartett

Die Eigenfunktionen der verschiedenen Anfangszustände sind in Teil I berechnet. Sie lauten [vgl. die Gleichungen (6), (7)] für den Quartettfall:

$$\left.\begin{aligned}\Psi_Q = {} & [\varphi(\bar{3}1,2) - \varphi(\bar{1}2,3)] \cdot \sigma(\bar{1}2\bar{3}) \cdot b_1 a_2 a_3 \\ & + [\varphi(\bar{1}2,3) - \varphi(2\bar{3},1)] \cdot \sigma(\bar{1}2\bar{3}) \cdot b_2 a_3 a_1 \\ & + [\varphi(2\bar{3},1) - \varphi(\bar{3}1,2)] \cdot \sigma(\bar{1}2\bar{3}) \cdot b_3 a_1 a_2\end{aligned}\right\} \tag{72}$$

für den Dublettfall:

$$\left.\begin{aligned}\Psi_D = {} & [\varphi(\bar{3}1,2) \cdot \sigma(\bar{3}1,2) - \varphi(\bar{1}2,3)\sigma(\bar{1}2,3)] \cdot b_1 a_2 a_3 \\ & + [\varphi(\bar{1}2,3) \cdot \sigma(\bar{1}2,3) - \varphi(\bar{2}3,1)\sigma(\bar{2}3,1)] \cdot b_2 a_3 a_1 \\ & + [\varphi(\bar{2}3,1) \cdot \sigma(\bar{2}3,1) - \varphi(\bar{3}1,2)\sigma(\bar{3}1,2)] \cdot b_3 a_1 a_2\end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Die Gleichung kann so umgeordnet werden [vgl. die Gleichungen (6), (7), (8)], daß gerade die Form der Gleichung (68) entsteht.

3. Berechnung des Wirkungsquerschnitts

Wie wir gesehen haben, wird der Mechanismus des Übergangs des Neutrons in den gebundenen Zustand durch einen magnetischen Dipol dargestellt, d. h. wir stellen uns vor, daß der Spin eines Teilchens umklappt und dabei ein zeitlich veränderliches elektromagnetisches Feld erzeugt wird. Nach der klassischen Elektrodynamik berechnet sich die Energie, die von einem Dipol ausströmt, der mit der Frequenz ν schwingt, zu $S = (^4/_3 c^3) \cdot (2\pi\nu)^4 \cdot \mathfrak{p}^2$, wobei $\mathfrak{p}$ das Moment des Dipols ist. Übertragen wir S in die Quantentheorie, so bedeutet S die mittlere ausgestrahlte Energie. Dagegen ist die bei einem einzelnen Übergang ausgestrahlte Energie gegeben durch $h\nu$; der Quotient $S/h\nu$ stellt die Übergangswahrscheinlichkeit bezogen auf die Zeiteinheit dar. Dabei ist für $\mathfrak{p}$ das Matrixelement M_{mn} einzusetzen, das dem Übergang zugeordnet ist. Wir erhalten also:

$$W = \frac{S}{h\nu} = \frac{4}{3\hbar}\left(\frac{2\pi\nu}{c}\right)^3 \cdot M_{mn}^2 . \tag{74}$$

Nehmen wir in cm^3 N Neutronen an, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß Übergänge eintreten, für den ganzen Raum gegeben durch $W \cdot N \cdot V$. Aus dem Quotienten dieser Zahl und der Anzahl der durch die Flächeneinheit in der Sekunde in den Raum eintretenden Neutronen $N \cdot v_N$ gewinnen wir den Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma = \frac{W \cdot N \cdot V}{N \cdot v_N} = \frac{V}{v_N} \cdot \frac{4}{3\hbar} \cdot \left(\frac{2\pi\nu}{c}\right)^3 \cdot M_{mn}^2 . \tag{75}$$

Wir haben nun nur noch M^2 und ν zu berechnen. ν gewinnen wir aus einer Betrachtung der Energieverhältnisse. Nach dem Energiesatz muß gelten

$$E_N - \varepsilon_D = E_T - \varepsilon_T + h\nu . \tag{76}$$

Da wir hier nur thermische Neutronen betrachten, ist $E_N = E_T = 0$, so daß

$$\left.\begin{aligned}h\nu &= \varepsilon_T - \varepsilon_D \\ &= 1{,}75 \cdot 10^{21}\,\mathrm{sec}^{-1}\end{aligned}\right\} \tag{77}$$

wird. Es wird also ein recht hartes γ-Quant bei diesem Übergang emittiert.

Der Operator des magnetischen Dipols setzt sich zusammen aus einem auf das Proton und einem auf das Neutron wirkenden Teil:

$$M = \sum_{x,y,z} \sum_{i=1}^{3} \left[\mu_p \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \left(1 - \vec{\varrho}_z^{(i)}\right) + \mu_n \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \left(1 + \vec{\varrho}_z^{(i)}\right)\right] \vec{\sigma}_x^{(i)} . \tag{78}$$

μ_p und μ_n sind die magnetischen Momente des Protons bzw. Neutrons.

$$\frac{1}{2}\left(1 - \vec{\varrho}_z\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{79a}$$

ist ein Operator, der 1 ist, wenn er auf die Ladungskoordinate des Protons, dagegen 0, wenn er auf die Ladungskoordinate des Neutrons wirkt. Gerade umgekehrt ist es bei

$$\frac{1}{2}\left(1 + \vec{\varrho}_z\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{79b}$$

$\vec{\sigma}$ ist der Spinoperator:

$$\left.\begin{array}{lll} \vec{\sigma}_x\alpha = \beta & \vec{\sigma}_y\alpha = -i\beta & \vec{\sigma}_z\alpha = \alpha \\ \vec{\sigma}_x\beta = \alpha & \vec{\sigma}_y\beta = i\alpha & \vec{\sigma}_z\beta = -\beta \end{array}\right\} \quad (80)$$

Das Quadrat des Matrixelementes ist:

$$M^2 = \sum_m \sum_n \left| \int \Psi_m^*(H^3) \cdot M \cdot \Psi_n(A) \cdot d\tau \right|^2 . \quad (81)$$

Der Index n an der Anfangsfunktion $\Psi(A)$ soll kennzeichnen, daß Dublett- und Quartettfunktionen (Quartett mit dem Spinmoment $\pm^3/_2$ und $\pm^1/_2$, die Summe über n hat also insgesamt sechs Glieder) zu berücksichtigen sind. Der Index m unterscheidet die Eigenfunktion der Gleichung (65) von derjenigen, die daraus hervorgeht, wenn man in ihr überall α durch β ersetzt und umgekehrt. Die erstere hätte also den Spin $^1/_2$ nach oben, die letztere nach unten, bezogen auf die vorgegebene z-Richtung. Von diesen 12 Gliedern geben 6 keinen Beitrag. Die restlichen 6 sind aus Symmetriegründen paarweise gleich (vgl. die Übersicht über die Übergangsmöglichkeiten auf Seite 249).

Die Berechnung des Matrixelementes liefert:

$$M^2 = (\mu_p - \mu_n)^2 \left| 12 \cdot \frac{\left| \int \psi_a(H^3) \cdot \psi_a(D)\, d\tau \right|^2}{\int \Psi^2(H^3)\, d\tau \cdot \int \Psi^2(D)\, d\tau} + 2 \cdot \frac{\left| \int \psi_a(H^3) \cdot \psi_a(Q)\, d\tau \right|^2}{\int \Psi^2(H^3)\, d\tau \cdot \int \Psi^2(Q^{3/2})\, d\tau} \right. \left. + 6 \cdot \frac{\left| \int \psi_a(H^3) \cdot \psi_a(Q)\, d\tau \right|^2}{\int \Psi^2(H^3)\, d\tau \cdot \int \Psi^2(Q^{1/2})\, d\tau} \right| \quad (82)$$

Es ist

$$\psi_a = \varphi(\overline{3}\overline{1},2) - \varphi(\overline{1}\overline{2},3) , \qquad \psi_s = \varphi(\overline{3}\overline{1},2) + \varphi(\overline{1}\overline{2},3) . \quad (83)$$

Die Symbole D und Q bezeichnen Dublett- und Quartettzustand der Anfangsfunktion. Das erste Glied in Gleichung (82) rührt her vom Dublettzustand, das zweite vom Quartettzustand mit dem Spinmoment $^3/_2$, das letzte vom Quartettzustand mit dem Spinmoment $^1/_2$. Bei der Ableitung dieser Formel ist Gebrauch gemacht von den Orthogonalitätsrelationen: Bei den richtigen Eigenfunktionen, die exakte Lösungen der Schrödinger-Gleichung sind, müßte sein:

$$\int \psi_s^* \psi_a\, d\tau = 0 \quad (84a)$$

$$\int \Psi^*(H^3) \cdot \Psi(A) \cdot d\tau = 0 . \quad (84b)$$

Daraus folgt unter Berücksichtigung von Gleichung (68), (73) und (83) für die Eigenfunktion des Dublettzustandes

$$3 \int \psi_s^*(H^3) \cdot \psi_s(D)\, d\tau + \int \psi_a^*(H^3) \cdot \psi_a(D)\, d\tau = 0 . \quad (85)$$

Bei unseren Eigenfunktionen, die Näherungsfunktionen sind, gilt die Bedingung der Gleichung (84b) und damit die Gleichung (85) naturgemäß nicht exakt, doch ist der Fehler von der Größenordnung des Fehlers unserer Rechnung und daher nicht zu beachten. Beim Quartett wird die Bedingung der Gleichung (84b) durch die Spinfunktionen erfüllt.

Die zahlenmäßige Auswertung von Gleichung (82) führt auf Integrale, wie sie im Teil I diskutiert wurden. Die Normierungskoeffizienten von $\psi(D)$ und $\psi(Q)$ wurden aus den Gleichungen (56) und (57) übernommen, und zwar wurde die Anschlußstelle R_0 der asymptotischen Lösung, die in die Berechnung der Normierungskoeffizienten eingeht, bei $\psi(D)$ gleich 1,5, bei $\psi(Q)$ gleich 2 gewählt, wie es nach den Ausführungen auf Seite 245 und der Fig. 1 am günstigsten erscheint. Mit

$$\left.\begin{array}{ll} \mu_p = g_p \cdot \mu_0 & g_p = +2{,}0 \\ \mu_n = g_n \cdot \mu_0 & g_n = -2{,}9 \\ \mu_0 = \dfrac{e\hbar}{2Mc} = 1 \text{ Kernmagneton} & \end{array}\right\} \quad (86)$$

erhält man $M^2 = 0{,}933 \cdot 10^{-3}/V$. Schließlich ergibt sich für den Wirkungsquerschnitt ($v_N = 2{,}5 \cdot 10^5$ cm/sec gleich $8{,}93 \cdot 10^{17}$ El.Rad./sec):

$$\sigma = 1{,}7 \cdot 10^{-28}\ \text{cm}^2 \quad (87)$$

Schiff (3) hatte den Wirkungsquerschnitt auf $0{,}3 \cdot 10^{-26}$ cm² abgeschätzt. — Unser Ergebnis ist in Übereinstimmung mit einer Messung von Borst und Harkins (13) aus dem Jahr 1939. Diese Autoren gründeten die Bestimmung des Wirkungsquerschnitts auf die Radioaktivität des H^3. Sie finden mit dieser Methode einen Querschnitt von 2 bis $3 \cdot 10^{-28}$cm². Außerdem gibt es in der Literatur nur noch eine ältere Arbeit von Kikuchi, Aoki und Takeda (12), die aber für den Wirkungsquerschnitt auf Grund ihrer Messung der γ-Strahlenintensität nur eine obere Grenze ($3 \cdot 10^{-26}$ cm²) angeben können.

C. Die Zertrümmerung des Deuterons

Die Zertrümmerung des Deuterons kann nur herbeigeführt werden, wenn die Energie des stoßenden Neutrons von der Größenordnung einiger Millionen Volt ist; denn die Bindungs-

energie des Deuterons beträgt 2,3 TME. Diese Energie muß das stoßende Neutron dem Deuteron mindestens zuführen. Dabei muß das Neutron diese Energie besitzen in dem Koordinatensystem, in dem der Schwerpunkt der drei Teilchen ruht. Rechnet man um auf jenes, in welchem das Deuteron ruht, so ist diese Energie mit dem Faktor $^3/_2$ zu versehen, so daß das stoßende Neutron mindestens eine Energie von $E = 3{,}45$ TME haben muß, damit überhaupt eine Zertrümmerung eintreten kann. Ist die Anfangsenergie größer als 3,45 TME, so verteilt sie sich nach der Reaktion auf die drei Teilchen derart, daß die Summe der Energien der drei Teilchen nach dem Stoß gleich ist der Anfangsenergie vermindert um die Bindungsenergie des Deuterons:

$$\tfrac{2}{3} E_N - |E_D| = E_R + E_r . \qquad (88)$$

Für die rechte Seite der Gleichung führen wir als Abkürzung die Bezeichnung E_S ein. Eine Übersicht über die Verteilung der Gesamtenergie E_N auf die Energien E_R und E_r gibt Tabelle 3.

Tabelle 3

E_R \ E_r	0	2	4	6	8
0	3,45	6,45	9,45	12,45	15,45
2	6,45	9,45	12,45	15,45	
4	9,45	12,45	15,45		
6	12,45	15,45			
8	15,45				E_N

1. Die Eigenfunktion des Endzustandes

Die Eigenfunktion zerlegen wir nach dem Vorgehen von v. Weizsäcker (in unveröffentlichten Rechnungen) ebenso wie beim Anfangszustand:

$$\varphi_E(\overline{12},3) = \varphi_E(\mathfrak{r}, \mathfrak{R}, \mathfrak{s}) = g_E(\mathfrak{r}) \cdot f(\mathfrak{R}) \cdot e^{i\mathfrak{k}\mathfrak{s}} . \qquad (89)$$

Für g_E wählen wir hier die Eigenfunktion des Deuterons im Kontinuumzustand. Die Eigenfunktion muß wieder ebenso wie für den Anfangszustand durch Lösung der zugehörigen Schrödinger-Gleichung bestimmt werden. Für r-Werte, die im Bereich des Potentials liegen, setzen wir entsprechend der Rechnung von v. Weizsäcker

$$g_E(\mathfrak{r}) = L_g \cdot e^{-\alpha_k r^2} . \qquad (90)$$

Außerhalb des Bereichs der Kernkräfte ist

$$g_E(\mathfrak{r}) = \frac{\sin(kr + \delta)}{kr \cdot \sqrt{V}} , \qquad (91)$$

wobei

$$k^2 = M E_r / \hbar^2 . \qquad (92)$$

V ist das Normierungsvolumen der Eigenfunktion. Der Normierungsfaktor L_g ist aus den Anschlußbedingungen zu bestimmen. Da es sich um die Normierung eines Kontinuumzustandes handelt, setzen wir L_g proportional zu $V^{-1/2}$:

$$L_g = L'_g/\sqrt{V} = l_k/k\sqrt{V} . \qquad (93)$$

Für die Konstanten l_k und α_k erhält v. Weizsäcker eine Energieabhängigkeit nach Tabelle 4.

Tabelle 4

E_r	l_k		a_k	
	Numerisch	Nach (94)	Numerisch	Nach (95)
0	$\sqrt{E_r}$	$\sqrt{E_r}$	0,74	0,73
1	0,83	0,83	0,78	0,78
2	1,07	1,07	0,82	0,82
6	1,48	1,45	0,99	0,99
10	1,76	1,43	1,21	1,18

Auf Grund der numerischen Rechnung sind die folgenden Näherungsformeln aufgestellt:

$$l_k = \sqrt{E_r} - 0{,}17\, E_r \qquad (94)$$

$$\alpha_k = 0{,}73 + 0{,}045\, E_r . \qquad (95)$$

Die Werte von $\alpha_k(E_r)$ und $l_k(E_r)$ auf Grund dieser Formeln sind in der Tabelle in der dritten und fünften Spalte eingetragen. Nur die Näherungsformel für l_k weicht oberhalb $E_r = 6$ merklich von den numerisch berechneten Werten ab.

Bei der Bestimmung von $f_E(\mathfrak{R})$ kommt die Problematik des Ansatzes der Gleichung (89) zutage. Die Berechtigung für diesen Produktansatz ist hier nicht in dem Maße gegeben wie bei der Anfangsfunktion. Denn benutzen wir für g_E die Deuteroneigenfunktion des Kontinuumzustandes, so ist es beliebig unwahrscheinlich, alle drei Teilchen gleichzeitig beisammen zu finden; d. h. daß kein Zusammenstoß stattfinden kann. Das liegt daran, daß der Produktansatz das dritte Teilchen gegenüber den beiden anderen unabhängig macht. Das war ohne Bedeutung, solange zwei Teilchen von vornherein beisammen waren, ist aber nicht länger aufrechtzuerhalten, sobald diese zwei Teilchen sich auch beliebig bewegen können. Deshalb müßte man korrekterweise den Produktansatz fallen lassen und die Schrödinger-Gleichung im Konfigurationsraum lösen. Da das nicht möglich ist, wählen wir mit v. Weizsäcker den Ausweg, unsere Eigenfunktion in dem Gebiet, in dem V groß ist, mit der wahren Eigenfunktion in möglichst gute Übereinstimmung zu bringen. Wir setzen daher bei dieser Rechnung für die Kontinuumsfunktion eine auf 1 normierte Gauß-Funktion:

$$g_E(\mathfrak{r}) = \left(\frac{2\alpha_k}{\pi}\right)^{3/4} e^{-\alpha_k r^2} . \qquad (96)$$

D. h. wir sorgen dafür, daß in dem für die Wechselwirkung wichtigen Fall kleiner R die beiden Teilchen, die im Anfangszustand das Deuteron bildeten, auch im Endzustand nahe beieinander sind. Allerdings sind sie das nun auch für große R. Das bewirkt aber keinen sehr beträchtlichen Fehler, weil die Gebiete großer R zu den Integralen der Gleichungen (24) und (25) wenig beitragen.

Mit diesem Ansatz berechnet man nun nach dem bei der Anfangsfunktion näher beschriebenen Verfahren die Konstanten β_{2i} der Funktion $f(R)$ im Quartett- und Dublettfall. Dabei wurden für E_r die Werte 0, 2 und 6 angenommen und für jeden dieser Werte die Rechnung durchgeführt. Das Ergebnis ist in Tabelle 5 zusammengestellt:

Tabelle 5

	E_r	0	2	6
Dublett	β_2	$-0{,}26\,(1+0{,}09\,E_s)$	$-0{,}17\,(1+0{,}14\,E_s)$	$+0{,}08\,(1-0{,}31\,E_s)$
	β_4	$-0{,}10\,(1+0{,}13\,E_s)$	$-0{,}11\,(1+0{,}16\,E_s)$	$-0{,}06\,(1+0{,}40\,E_s)$
Quartett	β_2	$1{,}92\,(1+0{,}14_5\,E_s)$	$1{,}51\,(1+0{,}09\,E_s)$	$1{,}19\,(1+0{,}05\,E_s)$
	β_4	$2{,}72\,(1+0{,}13\,E_s)$	$2{,}30\,(1+0{,}08\,E_s)$	$2{,}07\,(1+0{,}04\,E_s)$

Auch hier approximieren wir wieder die numerisch berechneten Werte durch eine Näherungsfunktion.

Dublett:

$$\left.\begin{aligned}\beta_2 &= -0{,}26 + 0{,}045\,E_r - 0{,}024\,E_s\\ \beta_4 &= -0{,}10 - 0{,}013\,E_s\,.\end{aligned}\right\} \tag{97}$$

Quartett:

$$\left.\begin{aligned}\beta_2 &= 1{,}92\,\frac{1+0{,}14\,(1-0{,}15\,E_r)\,E_s}{(1+0{,}3\,E_r)^{1/2}}\\ \beta_4 &= 2{,}72\,\frac{1+0{,}07\,E_r}{(1+0{,}41\,E_r)^{1/2}}\cdot\left(1+\frac{0{,}13\,E_s}{1+0{,}35\,E_r}\right).\end{aligned}\right\} \tag{98}$$

Für die Normierungskoeffizienten erhalten wir aus der Anschlußbedingung Tabelle 6. Die Anschlußstelle ist hier ebenso problematisch wie beim Anfangszustand (vgl. die Diskussion auf Seite 245). Entsprechend den früheren Überlegungen erschienen auch hier als Anschlußstellen $R_0 = 1{,}5$ bzw. $R_0 = 2$ als die wahrscheinlich richtigsten.

Tabelle 6

	E_r	0	2	6
Dublett	L_r'	$1{,}27\,(1-0{,}036\,E_s')$	$1{,}37\,(1-0{,}039\,E_s')$	$1{,}89\,(1-0{,}046\,E_s')$
Quartett	L_r'	$0{,}11\,(1-0{,}09\,E_s')$	$0{,}27\,(1-0{,}08\,E_s')$	$1{,}10\,(1-0{,}07\,E_s')$

Da wir nachher nur die Quadrate dieser Werte brauchen, benutzen wir für die Näherungsformeln gleich die Werte von $L_r'^2$. Sie lauten

im Dublettfall:
$$L_t'^2 = (1{,}61 - 0{,}68\,E_r + 0{,}61\,E_r)\,(1 - 0{,}08\,E_s')\,, \tag{99}$$

im Quartettfall:
$$L_t'^2 = (0{,}01 - 0{,}60\,E_r + 0{,}45\,E_r)\,(1 - 0{,}16\,E_s')\,. \tag{100}$$

Hierbei stellte es sich als ungünstig heraus, wenn die Abhängigkeit von E_s durch eine Entwicklung um $E_s = 0$ dargestellt wurde. Es wurde daher hier um die Stelle $E_s = 8$, also um einen Wert der oberen Grenze des Energiespektrums, entwickelt. Dazu setzen wir $E_s = 8 + E_s'$.

2. Der Wirkungsquerschnitt

Allgemeine Formeln

Nach Dirac ist die Übergangswahrscheinlichkeit zwischen Zuständen gleicher Energie gegeben durch

$$W \cdot t = \frac{2\pi \cdot |H|^2 \cdot t}{\hbar \cdot \Delta E}\,. \tag{101}$$

(Berechnung z. B. in C. F. v. Weizsäcker: Die Atomkerne. Leipzig 1937.) Es bedeutet H das zu dem Übergang gehörige Matrixelement, t die Zeitdauer des Übergangs. Der Faktor $1/\Delta E$ ist Folge davon, daß auf Grund der Ungenauigkeitsrelation die Energie nur bestimmt ist bis auf Beträge der Größenordnung $\hbar/t$. Bezeichnet ΔE den mittleren Abstand der Energiewerte, so gibt $1/\Delta E$ direkt die Zahl der verschiedenen Zustände an, in denen sich das System befinden kann. Je größer diese Zahl ist, um so größer ist die Übergangswahrscheinlichkeit.

Für den Wirkungsquerschnitt erhält man nach Gleichung (75)

$$\sigma = \frac{W \cdot N \cdot V}{N \cdot v_N} = \frac{V}{v_N} \cdot \frac{2\pi \cdot |H|^2}{\hbar \cdot \Delta E} \tag{102}$$

Berechnung der Anzahl der Energieniveaus pro Energieintervall 1

Dazu betrachten wir zunächst die Anzahl der Energieniveaus von E_r bei festgehaltenen E_R, indem wir die Anzahl der Impulsvektoren $\mathfrak{p}$ mit einem Absolutbetrag zwischen p_r und $p_r + dp_r$ berechnen. Diese Zahl ist unter Berücksichtigung des Spins:

$$n \cdot dp_r = 8\pi p_r^2 \cdot dp_r \cdot V/h^3 . \quad (103)$$

(Da wir einen Kontinuumzustand haben, haben wir die Impulskomponente mit $1/V^{1/3}$ normiert: $\mathfrak{p} = \left(\frac{p_x}{V^{1/3}}, \frac{p_y}{V^{1/3}}, \frac{p_z}{V^{1/3}}\right)$.

Da $E = p^2/2M$, erhalten wir für die Anzahl der Energieniveaus für irgendein festes E_R im Energieintervall dE_r

$$n \frac{M_r}{p_r} \cdot dE_r = 8\pi M_r \cdot p_r \cdot dE_r \cdot V/h^3 . \quad (104)$$

Für alle möglichen E_r-Werte also

$$n_{E_r} = 8\pi M_r \cdot p_r \cdot dE_r \cdot V/h^3 . \quad (105)$$

Entsprechend Obigem finden wir die Anzahl der verschiedenen Niveaus von E_R bei festgehaltenem E_r zu

$$8\pi M_R \cdot p_R \cdot dE_R \cdot V/h^3 ,$$

Da für einen Wert von E_R bereits n_{E_r} E_r-Niveaus existieren, ist die Gesamtzahl der möglichen Zustände im Energieintervall dE_R:

$$8\pi M_R \cdot p_R \cdot dE_R \cdot n_{E_r} \cdot V/h^3 . \quad (106)$$

Im Energieintervall 1 also:

$$1/\Delta E = 8\pi M_R \cdot p_R \cdot dE_R \cdot V/h^3 \cdot 8\pi M_r \int_0^{E_r} p_r \cdot dE_r \cdot V/h^3 . \quad (107)$$

Zur Erleichterung der Schreibweise führen wir den differentiellen Wirkungsquerschnitt ein:

$$\sigma(E_\tau) dE_\tau = \frac{V}{v_N} \cdot \frac{2\pi}{\hbar} \cdot \left(\frac{8\pi V}{h^3}\right)^2 \cdot M_\tau \cdot M_R \cdot p_\tau \cdot p_R : \left\{\tfrac{3}{4} |H_{ae}^{\sigma}|^2 + \tfrac{1}{4} |H_{ae}^{\tau}|^2\right\} \cdot dE_\tau \quad (108)$$

$$\sigma = \int_0^{E_\tau} \sigma(E_\tau) dE_\tau \quad (109)$$

H_{ae} sind die Matrixelemente für Dublett- und Quartettzustand, $^1/_4$ und $^3/_4$ die zugehörigen Gewichtsfaktoren. Da

$$M_N = M \qquad M_r = M/2 \qquad M_R = 2M/3 , \quad (110)$$

ist

$$v_N = \sqrt{\frac{2E_N}{M}}$$

und

$$p_\tau = \sqrt{2 M_\tau E_\tau} = \sqrt{M \cdot E_\tau} ; \qquad p_\Re = \sqrt{2 M_\Re \cdot E_\Re} = \sqrt{\tfrac{4}{3} M E_\Re} . \quad (111)$$

M = Neutronenmasse.

In den von uns benutzten Einheiten: Elektronenradius, TME und Sekunden erhält man schließlich für den differentiellen Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma(E_\tau) dE_\tau = 4 \cdot 10^{-5} \cdot V^3 \cdot \sqrt{\frac{E_\tau \cdot E_\Re}{E_N}} \cdot \left\{\tfrac{3}{4} |H_{ae}^{\sigma}|^2 + \tfrac{1}{4} |H_{ae}^{\tau}|^2\right\} dE_\tau . \quad (112)$$

Berechnung des Matrixelementes

Es ist

$$H_{ae} = \int d\tau d\Re \cdot \Psi^*(E) \cdot V \cdot \Psi(A) . \quad (113)$$

$\Psi(A)$ ist dabei die im Teil I berechnete Eigenfunktion, V der in den Gleichungen (1) und (2) angegebene Operator. — Die Eigenfunktion $\Psi(E)$ lautet:

$$\left.\begin{aligned}\Psi(E) = {} & \varphi(\overline{12},3)\, \sigma(\overline{12},3)\, \varrho(\overline{12},3) \\ & + \varphi(\overline{23},1)\, \sigma(\overline{23},1)\, \varrho(\overline{23},1) \\ & + \varphi(\overline{31},2)\, \sigma(\overline{31},2)\, \varrho(\overline{31},2)\end{aligned}\right\} \quad (114)$$

mit

$$\varphi(\overline{12},3) = g_E(\mathfrak{r}) \cdot f_E(\mathfrak{R}) . \quad (115)$$

Die Konstanten sind früher bestimmt worden.

Der Ausdruck $V \cdot \Psi(A)$ tritt bereits im I. Teil auf und kann von dort übernommen werden. Dieser Ausdruck ist mit $\Psi(E)$ zu multiplizieren. Es genügt, wenn wir das Produkt mit dem ersten Summanden von $\Psi(E)$ bilden und vor das Ganze einen Faktor 3 setzen; denn die beiden durch die folgenden Summanden bedingten Integrale lassen sich durch eine einfache Transformation auf die Form des ersten zurückführen. Der Aus-

druck $\Psi^*(E) \cdot V \cdot \Psi(A)$ liefert dann unter Zugrundelegung normierter Eigenfunktionen nach den Gleichungen (10) bis (13) und (17)

im Dublettfall:

$$\left.\begin{aligned}\frac{3\,g_K^D(\mathfrak{r})\cdot f_K(\mathfrak{R})}{\sqrt{\int\Psi_D^2(E)\,d\tau}\sqrt{\int\Psi_D^2(A)\,d\tau}}\cdot 3\cdot\Big\{&\Big[U(\mathfrak{r})+\Big(w-\tfrac{1}{2}(h+b)\Big)\cdot\Big(U\Big(\mathfrak{R}+\tfrac{\mathfrak{r}}{2}\Big)-U\Big(\mathfrak{R}-\tfrac{\mathfrak{r}}{2}\Big)\Big)\Big]\Phi_D(\overline{12},3)\\&+\Big[\Big(m-\tfrac{1}{2}(h+b)\Big)\cdot U\Big(\mathfrak{R}+\tfrac{\mathfrak{r}}{2}\Big)+\tfrac{1}{2}(h+b)\cdot U\Big(\mathfrak{R}-\tfrac{\mathfrak{r}}{2}\Big)\Big]\Phi_D(\overline{23},1)\\&+\Big[\Big(m-\tfrac{1}{2}(h+b)\Big)\cdot U\Big(\mathfrak{R}-\tfrac{\mathfrak{r}}{2}\Big)+\tfrac{1}{2}(h+b)\cdot U\Big(\mathfrak{R}+\tfrac{\mathfrak{r}}{2}\Big)\Big]\Phi_D(\overline{31},2)\Big\}\end{aligned}\right\}\quad(116)$$

im Quartettfall:

$$\left.\begin{aligned}\frac{3\,g_K^Q(\mathfrak{r})\cdot f_K^Q(\mathfrak{R})}{\sqrt{\int\Psi_Q^2(E)\,d\tau}\cdot\sqrt{\int\Psi_Q^2(A)\,d\tau}}\cdot\Big\{&\Big[U(\mathfrak{r})+(b+w)\cdot\Big(U\Big(\mathfrak{R}-\tfrac{\mathfrak{r}}{2}\Big)+U\Big(\mathfrak{R}+\tfrac{\mathfrak{r}}{2}\Big)\Big)\Big]\Phi_D(\overline{12},3)\\&+(m+h)\cdot U\Big(\mathfrak{R}+\tfrac{\mathfrak{r}}{2}\Big)\cdot\Phi_Q(\overline{23},1)\\&+(m+h)\cdot U\Big(\mathfrak{R}-\tfrac{\mathfrak{r}}{2}\Big)\cdot\Phi_Q(\overline{31},2)\Big\}\end{aligned}\right\}\quad(117)$$

Der Faktor 3 vor dem Produkt $V\cdot\Psi(A)$ rührt her von der Tatsache, daß die Schrödinger-Gleichung (10) durch 3 dividiert worden ist. — Die Integration über $\mathfrak{r}$ kann, soweit sie sich auf die Ableitung der Formeln bezieht, auch noch aus dem Teil I übernommen werden. Es ist

im Dublettfall:

$$\left.\begin{aligned}\overline{H}_{ae}^D=\;&6\int d\mathfrak{R}\cdot f_K^D(\mathfrak{R})\cdot\int d\mathfrak{r}\cdot g_K(\mathfrak{r})\cdot U(\mathfrak{r})\cdot g_A\Big(\mathfrak{R}+\tfrac{\mathfrak{r}}{2}\Big)\cdot f_A^D\Big(-\frac{\mathfrak{R}}{2}+\frac{3\,\mathfrak{r}}{4}\Big)\\&+6\int d\mathfrak{R}\cdot f_K^D(\mathfrak{R})\cdot\int d\mathfrak{r}\cdot g_K(\mathfrak{r})\cdot U\Big(\mathfrak{R}+\tfrac{\mathfrak{r}}{2}\Big)\cdot g_A\Big(\mathfrak{R}+\tfrac{\mathfrak{r}}{2}\Big)\cdot f_A^D\Big(-\frac{\mathfrak{R}}{2}+\frac{3\,\mathfrak{r}}{4}\Big)\\&+6\,\frac{16{,}5}{12}\cdot\int d\mathfrak{R}\cdot f_K^D(\mathfrak{R})\cdot\int d\mathfrak{r}\cdot g_K(\mathfrak{r})\cdot U\Big(\mathfrak{R}-\tfrac{\mathfrak{r}}{2}\Big)\cdot g_A\Big(\mathfrak{R}+\tfrac{\mathfrak{r}}{2}\Big)\cdot f_A^D\Big(-\frac{\mathfrak{R}}{2}+\frac{3\,\mathfrak{r}}{4}\Big)\end{aligned}\right\}\quad(118a)$$

im Quartettfall:

$$\left.\begin{aligned}\overline{H}_{ae}^Q=\;&2\cdot\int d\mathfrak{R}\cdot f_K^Q(\mathfrak{R})\cdot\int d\mathfrak{r}\cdot g_K(\mathfrak{r})\cdot U(\mathfrak{r})\cdot g_A\Big(\mathfrak{R}+\tfrac{\mathfrak{r}}{2}\Big)\cdot f\Big(-\frac{\mathfrak{R}}{2}+\frac{3\,\mathfrak{r}}{4}\Big)\\&+2\cdot\int d\mathfrak{R}\cdot f_K^Q(\mathfrak{R})\cdot\int d\mathfrak{r}\cdot g_K(\mathfrak{r})\cdot U\Big(\mathfrak{R}+\tfrac{\mathfrak{r}}{2}\Big)\cdot g_A\Big(\mathfrak{R}+\tfrac{\mathfrak{r}}{2}\Big)\cdot f\Big(-\frac{\mathfrak{R}}{2}+\frac{3\,\mathfrak{r}}{4}\Big)\\&-2\int d\mathfrak{R}\cdot f_K^Q(\mathfrak{R})\cdot\int d\mathfrak{r}\cdot g_K(\mathfrak{r})\cdot U\Big(\mathfrak{R}-\tfrac{\mathfrak{r}}{2}\Big)\cdot g_A\Big(\mathfrak{R}+\tfrac{\mathfrak{r}}{2}\Big)\cdot f\Big(-\frac{\mathfrak{R}}{2}+\frac{3\,\mathfrak{r}}{4}\Big)\end{aligned}\right\}\quad(118b)$$

[Vgl. die mit U behafteten Glieder in den Gleichungen (24) und (25), die lediglich mit $f_K(\mathfrak{R})$ multipliziert zu denken sind; beachte, daß $2w-(h+b)+m/2=2(b+w)-(m+h)=0$.] Nach Durchführung der Integration über $\mathfrak{r}$ kann die über $\mathfrak{R}$ ausgeführt werden, die ebenso wie die über $\mathfrak{r}$ auf Integrale vom Typus $\int_0^\infty r^{2t}\cdot e^{-cr^2}\cdot dr$ führt. Die eben skizzierte Rechnung wurde wieder für die Energien $E_\tau=0$, 2 und 6 durchgeführt, und die Ergebnisse am Ende durch eine Näherungsformel zusammengefaßt. Zur Verbesserung der Übersicht setzten wir

$$H_{ae}=\nu\cdot\overline{H}_{ae}\qquad(119)$$

mit

$$\nu=-\frac{3\cdot L_g\cdot L_f\cdot N_g\cdot N_f\cdot A}{\left[\int\Psi^2(E)\,d\tau\right]^{1/2}\left[\int\Psi^2(A)\,d\tau\right]^{1/2}},\qquad(120)$$

wobei die Normierungsfaktoren entsprechend der Dublett- oder Quartettfunktion einzusetzen sind:

$$\left.\begin{aligned} r_D^2 &= 32{,}7\,(1{,}61 - 1{,}22\,|E_t + 0{,}80\,E_t)\,(1 - 0{,}08\cdot E')\,\frac{1}{\Gamma^2} \\ r_Q^2 &= 30\cdot(-0{,}60\,|E_t + 0{,}57\,E_t)\,(1 - 0{,}28\cdot E')\,\frac{1}{\Gamma^2}\cdot \end{aligned}\right\} \tag{120a}$$

Die Näherungsformeln für $\overline{H}_{\alpha\rho}$ lauten dann

$$\left.\begin{aligned} \overline{H}_{\alpha\rho}^{D} &= 2\cdot\pi^3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdot 0{,}51\cdot\frac{1 - 0{,}05\,E_s + 0{,}04\,E_t}{(1 + 0{,}05\,E_t)^{9/2}} \\ \overline{H}_{\alpha\rho}^{Q} &= 2\cdot\pi^3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdot 0{,}65\cdot\frac{1 + 0{,}17\,E_s + 0{,}39\,E_t}{(1 + 0{,}40\,E_t)^{9/2}}\cdot \end{aligned}\right\} \tag{121}$$

(116)

Berechnung des Wirkungsquerschnittes

Nach der Berechnung des Matrixelementes kann jetzt leicht der Wirkungsquerschnitt angegeben werden. Es ist

(117)

$$\begin{aligned} \sigma(E_t)\,dE_t = {} & 4\cdot 10^{-5} = 4\cdot\pi^6\left(\frac{4}{3}\right)^6\cdot\sqrt{\frac{E_t E_{\mathfrak{M}}}{E_N}} \\ & \cdot\left\{\frac{1}{3}\cdot 32{,}7\,(1{,}61 - 1{,}22\,|E_t + 0{,}8\,E_t)\,(1 - 0{,}08\,E')\cdot 0{,}25\,\frac{1 - 0{,}1\,E_s + 0{,}07\,E_t}{(1 + 0{,}05\,E_t)^3}\right. \\ & \left. + \frac{2}{3}\cdot 30\cdot(-0{,}60\,|E_t + 0{,}57\,E_t)\,(1 - 0{,}28\,E')\cdot 0{,}54\,\frac{1 + 0{,}34\,E_s + 0{,}78\,E_t}{(1 + 0{,}40\,E_t)^3}\right\}\cdot \end{aligned} \tag{122}$$

Zur Vereinfachung dieser Formeln wurden die von E_t abhängigen Faktoren für verschiedene Werte von E_t berechnet und die Ergebnisse durch eine einfache Näherungsformel zusammengefaßt. Es wird dann:

$$\sigma(E_t)\,dE_t = 1{,}2\cdot\sqrt{\frac{E_t E_{\mathfrak{M}}}{E_N}}\,dE_t\cdot\{(1 - 0{,}16\,E')\,(1 + 0{,}31\,E_t) + 1{,}36\,|E_t\cdot(1 - 0{,}22\,E')\}\,. \tag{123}$$

Der totale Wirkungsquerschnitt ergibt sich dann durch eine Integration über E_t. Mit $E_{\mathfrak{M}} = E_s - E_t$ erhalten wir:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \tag{124}$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \int_0^1 1{,}2\,(1 - 0{,}16\,E')\,\frac{E_s^2}{E_N^{1/2}}\,\sqrt{x\,(1 - x)}\,dx \\ \sigma_2 &= \int_0^1 1{,}2\,(1 - 0{,}16\,E')\cdot 0{,}31\,\frac{E_s^3}{E_N^{1/2}}\,\sqrt{x^3\,(1 - x)}\,dx \\ \sigma_3 &= \int_0^1 1{,}2\cdot 1{,}36\cdot(1 - 0{,}22\,E')\cdot\frac{E_s^{7/2}}{E_N^{1/2}}\cdot\sqrt{x^2\,(1 - x)}\,dx\,. \end{aligned}\right\} \tag{124a}$$

Nun ist:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^1 x^{1/2}\,(1 - x)^{1/2}\,dx &= \frac{\pi}{8} \\ \int_0^1 x\,(1 - x)^{1/2}\,dx &= \frac{4}{15} \\ \int_0^1 x^2\,(1 - x)^{1/2}\,dx &= \frac{\pi}{16}\cdot \end{aligned}\right\} \tag{125}$$

Rechnet man außerdem den Wirkungsquerschnitt auf die üblichen Einheiten $10^{-24}\,\mathrm{cm}^2$ um, so ist mit $0{,}28^2 = 0{,}078$ zu multiplizieren. Gleichung (124) liefert dann für den Wirkungsquerschnitt bei verschiedener Energie des einfallenden Neutrons die Tabelle 7.

Tabelle 7
(E in TME, σ in 10^{-24} cm²)

E_N	3,5	5,0	6,5	8,0	9,5	12,5	15,5
σ	0,0	0,07	0,30	0,66	1,10	2,05	2,70

Vergleich mit dem Experiment

Experimentelle Arbeiten über den Zertrümmerungsquerschnitt des Deuterons liegen nur für Protonen als Geschosse vor. Barkas und White (14) haben Deuteronen mit Protonen der Energie 5,1 MeV bombardiert. Sie erhalten dabei einen Wirkungsquerschnitt von $1{,}4 \cdot 10^{-26}$ cm². Allerdings halten die Autoren ihre Methode für nicht so exakt, als daß sie mehr als die Größenordnung ihres Ergebnisses garantieren können. Wenn wir dieses Resultat mit unseren Werten vergleichen wollen, so müssen wir abschätzen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, daß ein Proton den Potentialberg durchdringt. Diese Wahrscheinlichkeit ist nach Gamow gegeben durch den Ausdruck

$$\frac{2\pi\gamma}{2^{2\pi\gamma}-1},$$

wobei

$$\gamma = \frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2}{\hbar \cdot v}.$$

Für uns ist $Z_1 = Z_2 = 1$. v ist die Anfangsgeschwindigkeit des Protons im Schwerpunktsystem und bestimmt durch $^2/_3 \cdot \sqrt{2E/M}$. E bedeutet hier die Energie der einfallenden Protonen, sie betrug 5,1 MeV = 5,5 TME. Mit diesem Wert erhält man für den Gamow-Faktor den Wert $^2/_3$. Infolge der Resonanzeffekte ist dieser Wert noch mit einem Korrekturausdruck zu multiplizieren, der praktisch 1 ist, wenn man sich außerhalb der Resonanzgebiete, dagegen unter Umständen wesentlich größer als 1 ist, wenn man sich in der Nähe der Resonanzstellen befindet. Setzen wir diesen Korrekturfaktor gleich 1, so wäre der Wirkungsquerschnitt für Neutronen gegeben durch

$$^3/_2 \cdot 1{,}4 \cdot 10^{-26}\ \text{cm}^2 = 2{,}1 \cdot 10^{-26}\ \text{cm}^2.$$

Demgegenüber liefert die Rechnung für 5,5 TME-Neutronen $15 \cdot 10^{-26}$ cm². Die beiden Ergebnisse differieren also etwa um einen Faktor 7. Ob dieser große Unterschied noch innerhalb der Fehlergrenze der Messungen von Barkas und White liegt, ist auf Grund der Mitteilung dieser Autoren nicht abzuschätzen.[1])

1) Der auf Grund von Messungen in der Wilson-Kammer von E. Bagge abgeschätzte Wirkungsquerschnitt (vgl. vorstehende Arbeit) steht in guter Übereinstimmung mit unserem Ergebnis. Dagegen ist das von Bagge bei 110 keV Reichweite gefundene Maximum in der Energieverteilungskurve der Zertrümmerungs- und Stoßprodukte auf Grund dieser Rechnung nicht zu verstehen.

Zusammenfassung

Es wurden die Wirkungsquerschnitte für die Kernreaktionen des Deuterons gegenüber Neutronen berechnet. Als Potential wurde der Volz-Remmersche Ansatz benutzt; Austauscheffekte wurden exakt berücksichtigt. Dagegen mußte die Polarisation des Deuterons vernachlässigt werden; denn nur unter dieser Voraussetzung konnte die Eigenfunktion für den Anfangszustand durch ein Produkt dargestellt werden. Als Koordinaten wurden eingeführt:

der Abstand $\mathfrak{r}$ der beiden Teilchen des Deuterons,
der Abstand $\mathfrak{R}$ des dritten Teilchens vom Schwerpunkt des Deuterons,
die Schwerpunktkoordinate.

Als Eigenfunktion $g(\mathfrak{r})$ ist die Deuteron-Eigenfunktion für den Grundzustand zu wählen. Für die Eigenfunktion $f(\mathfrak{R})$ wurde für kleine R der Ansatz $(1 + \beta_2 R^2 + \beta_4 R^4) \cdot \exp(-\eta R^2)$ auf Grund einer Überlegung am Schalenmodell der leichten Kerne benutzt und die Konstanten β_2, β_4, η durch Lösung der Schrödinger-Gleichung bestimmt. Aus der Anschlußbedingung dieser Funktion und der asymptotischen Lösung war die Phase der Welle des einfallenden Neutrons für große R und daraus der Wirkungsquerschnitt nach bekannter Formel zu berechnen. Das Ergebnis ist mit $2{,}5 \cdot 10^{-24}$ cm² für thermische Energien und mit $1{,}6 \cdot 10^{-24}$ cm² für höhere Energien (3 TME) etwas niedriger als die letzten Messungen, die etwa $2{,}9$ bzw. $2 \cdot 10^{-24}$ cm² ergaben. Als größte Fehlerquelle ist in diesem Ergebnis wie in den Wirkungsquerschnitten für Einfang und — vor allem — Zertrümmerung die Unbestimmtheit der Anschlußstelle enthalten.

Der Einfang des Neutrons kann mit merklicher Wahrscheinlichkeit nur unter Umklappen eines Spins vor sich gehen. Demnach ist es ein magnetischer Dipol, der die überschüssige Energie ausstrahlt. Das Matrixelement des Übergangs kann dann berechnet werden, wenn man die Eigenfunktion des Endzustandes kennt. Diese wurde möglichst genau berechnet unter der Annahme, daß das Proton und ein Neutron im Kern des Tritons zu einer Untereinheit zusammentreten. Das Ergebnis der Rechnung ist mit $1{,}7 \cdot 10^{-28}$ cm² in Übereinstimmung mit den neueren Experimenten.

Für die Zertrümmerung schließlich wurde die Eigenfunktion des Endzustandes in der gleichen Weise wie für den Anfangszustand angesetzt unter Neubestimmung der Konstanten. Der Wirkungsquerschnitt kann aus energetischen Gründen erstmals von Null verschieden sein bei einer Neutronenenergie von $E_N^{(0)} = 3{,}45$ MeV. Er steigt von Null $(E_N = E_N^{(0)})$ nahezu mit dem

Quadrat der $E_N^{(0)}$ übersteigenden Energie und erreicht bei 10 MeV $2 \cdot 10^{-24}$ cm².

Ich möchte diese Arbeit nicht schließen, ohne Herrn Dr. v. Weizsäcker herzlichst zu danken für die Anregung zu dieser Arbeit, sein stetes, förderndes Interesse und viele lehrreiche Diskussionen über die große Zahl der physikalischen Probleme, die sich im Anschluß an diese Arbeit auf dem Gebiet der Kernphysik und der Quantenmechanik ergeben haben. Herrn Professor Dr. Dr. h. c. Debye danke ich für die Aufnahme im Kaiser-Wilhelm-Institut für Physik, der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Gewährung eines Forschungsstipendiums.

Literaturverzeichnis

1) L. I. Schiff, Phys. Rev. **52**, 149, 1937.
2) H. Yukawa und S. Sakata, Proc. of the Phys.-Math. Soc. Japan **19**, 542, 1937.
3) L. I. Schiff, Phys. Rev. **52**, 242, 1937.
4) S. Flügge, Zeitschr. f. Phys. **108**, 545, 1938.
5) Lloyd Motz und Julian Schwinger, Phys. Rev. **58**, 26, 1940.
6) I. R. Dunning, G. B. Pegram, G. A. Fink und D. P. Mitchell, Phys. Rev. **48**, 265, 1935.
7) M. Goldhaber und G. H. Briggs, Proc. Roy. Soc. London (A) **162**, 127, 1937.
8) S. Kikuchi und H. Aoki, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan **21**, 75, 1939.
9) W. H. Zinn, S. Seely und V. W. Cohen, Phys. Rev. **56**, 260, 1939.
10) R. Fleischmann, Physik in regelmäß. Ber. **8**, Heft 1, 1940.
11) W. Rarita und R. D. Present, Phys. Rev. **51**, 788, 1937.
12) S. Kikuchi, H. Aoki und Takeda, Tokyo Inst. of Phys. and Chem. Res. **31**, 195, 1937.
13) L. B. Borst und W. D. Harkins, Phys. Rev. **57**, 659, 1940.
14) Walter H. Barkas und Milton G. White, Phys. Rev. **56**, 288, 1939.
15) H. Volz, Zeitschr. f. Phys. **105**, 537, 1937.
16) N. Kemmer, Nature **146**, 192, 1937.

Berlin-Dahlem, am 15. Oktober 1940, Kaiser-Wilhelm-Institut für Physik.

(Eingegangen 28. Mai 1942)

Ein einfacher Apparat zur Vorführung der Gruppengeschwindigkeit

Von E. Mollwo (Göttingen)

Der Formalismus fortschreitender, unendlich ausgedehnter Wellen spielt bei der quantitativen Beschreibung der Ausbreitung von Strahlung aller Art eine entscheidende Rolle. Zur einprägsamen Vorführung verschiedener Eigenschaften dieses Wellenbildes sind zahlreiche Modelle gebaut worden. Ein Modell, das speziell den Zusammenhang zwischen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit zeigt und sich schon mehrfach in der Vorlesung bewährt hat, soll im folgenden beschrieben werden. Gegenüber einigen anderen in der Literatur angegebenen Modellen[1]) scheint es mir gewisse Vorzüge zu besitzen.

Prinzipiell haben wohl alle vorgeschlagenen Apparate den gleichen Aufbau. Sie zeigen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der einfachsten Wellengruppe, also einer aus zwei Einzelwellen entstehenden Schwebungswelle. Fig. 1 gibt die

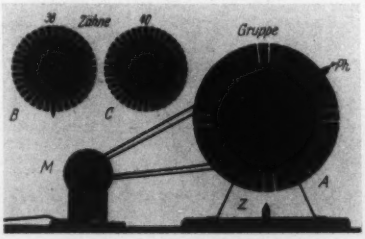


Fig. 1. Anordnung zur Vorführung der Gruppengeschwindigkeit.

Anordnung im Schattenriß wieder. Zwei runde Scheiben B und C aus 2 mm dickem Aluminiumblech von 30 cm Durchmesser tragen an ihrem Rand 36 bzw. 40 Einschnitte von 4 mm Breite. Beide Scheiben sind auf einer gemeinsamen Achse unabhängig voneinander drehbar mit Kugellagern gelagert. Im Schattenwurf erscheint die Schwebungswelle mit vier Maxima und vier Minima, die je eine Gruppe darstellen (vgl. Fig. 1 A). An beiden Scheiben befinden sich Schnurlaufscheiben, und zwar an der einen sechs verschiedenen Durchmessers (15,3, 16,2, 17,1, 18,0, 18,9, 19,8 cm), an der anderen eine (18,0 cm). Über sie werden die Scheiben mit Hilfe elastischer Riemen von einem kleinen Zahnradsynchronmotor M in gleichsinnige, gleichförmige Drehung gesetzt. Mit dem Schnurlauf von 18,0 cm Durchmesser erfolgt eine Umdrehung in 3,6 Sekunden.

Zur Markierung einer Stelle bestimmter Phase befestigt man an den Blechscheiben einen leichten Zeiger *Ph*. Mit ihm und der Ablesemarke Z bestimmt man die Phasengeschwindigkeiten u und u_1 der beiden Einzelwellen. Außerdem mißt man die Umlaufgeschwindigkeit eines Maximums der Schwebungswelle, also die Gruppen-

1) Als neueste ist mir bekannt geworden eine Anordnung von H. Greinacher, Helvetica Physica acta XIV, 552, 1941.

geschwindigkeit. So zeigt man quantitativ den durch die Formel

$$u^* = u - \lambda \frac{du}{d\lambda} \qquad (1)$$

gegebenen Zusammenhang zwischen Phasengeschwindigkeit u und Gruppengeschwindigkeit u^*. Dazu schreibt man die Formel (1) zweckmäßig

$$\frac{u^*}{u} = 1 - \frac{\lambda}{d\lambda}\frac{du}{u},$$

setzt $du = u - u_1$ und $\frac{\lambda}{d\lambda} = 10$, wenn u die Umlaufgeschwindigkeit der Scheibe mit 36 Zähnen ist. Da der Synchronmotor sehr gleichförmig läuft, kann man durch Messung vieler Umläufe eine große Genauigkeit erreichen. Das ist wichtig, weil man zur Bestimmung der Dispersion $\frac{du}{d\lambda}$ die Differenz der Phasengeschwindigkeiten $u - u_1$ braucht. Auch ohne Messung sieht man eindrucksvoll, wie je nach Wahl der Dispersion $\frac{du}{d\lambda}$ die Gruppen den Stellen gleicher Phase, markiert durch den Zeiger, entgegenlaufen, ihnen mit kleinerer Geschwindigkeit nachlaufen oder auch sie überholen.

Zur Vorführung bildet man eine kreisförmige Blende auf die Projektionsfläche ab und stellt den Apparat so in den Strahlenkegel, daß im Schattenwurf nur ein heller Kreisring die Scheiben umgibt, in dem die Ablesemarke Z und die Phasenmarke Ph erscheinen.

Göttingen, April 1942.

(Eingegangen 7. Mai 1942)

BESPRECHUNGEN

Sämtliche in diesem Heft besprochenen oder vom Verlag angezeigten Bücher sind in allen deutschen Buchhandlungen zu erhalten

Wilhelm Jander, Lehrbuch für das anorganisch-chemische Praktikum. III. Aufl. 8° VIII und 419 S. Mit 39 Abbildungen. Leipzig 1942. S. Hirzel. Ganzleinen RM 8,—.

Das Erscheinen der 3. Auflage dieses Lehrbuches knapp drei Jahre nach der ersten zeigt, eine wie gute Aufnahme es bei seinem Publikum, den Chemikern der ersten Semester, gefunden hat. Trotz längerer Inanspruchnahme durch Heeresdienst hat es der Verfasser ermöglicht, neben Verbesserungen von Fehlern auch Erweiterungen und kleinere neue Abschnitte einzufügen. Sie werden mit dazu beitragen, den Nutzen und die Beliebtheit des Buches zu erhöhen. F. Rogowski

H. Lichte und A. Narath, Physik und Technik des Tonfilms. 381 S. Mit 296 Abb. Leipzig 1941. S. Hirzel. Geb. RM 26,—.

Seit langem bestand ein Bedürfnis nach einer Neuauflage des Buches „Tonfilmaufnahme und -wiedergabe nach dem Klangfilmverfahren" von F. Fischer und H. Lichte, das 1931 im gleichen Verlage erschienen war. Angesichts der Entwicklung der Tonfilmtechnik während des letzten Jahrzehnts entschlossen sich jedoch die Verfasser, eine völlig neue Darstellung des Gegenstandes in dem vorliegenden Werke zu geben. Die Hauptstütze des Buches bilden die Untersuchungen in den Klangfilmlaboratorien; das übrige inländische und das ausländische Schrifttum ist so weitgehend wie möglich herangezogen worden. Um den gesteckten Rahmen des Buches einzuhalten, wurde auf die ausführliche Behandlung einiger Randgebiete verzichtet. Die statt dessen gegebene knappe Darstellung dieser Randgebiete, nämlich der akustischen Grundbegriffe, Lautsprecher, Mikrophone, Raumakustik und Stereophonie enthält jedoch alles Wesentliche. Für den darüber hinaus interessierten Leser steht gerade über diese Gebiete eine ausreichende Spezialliteratur zur Verfügung; ein Grund übrigens für die hier gewählte straffe Zusammenfassung.

Nach einer Einleitung und der genannten kurzen Darstellung der akustischen Grundlagen des Tonfilms beginnt die eigentliche ausführliche Behandlung der Physik und Technik des Tonfilms, die sich in vier Hauptabschnitte gliedert, nämlich in Tonaufnahme, Tonwiedergabe, Tonphotographie und praktische Tonfilmherstellung. Von den vielen behandelten Einzelgebieten seien hier erwähnt: Elektrooptische und elektromechanische Lichtsteuergeräte, Optiken für Tonaufnahme und -wiedergabe, Tonaufnahme- und Tonwiedergabegeräte, Intensitäts- und Transversalverfahren, Tonkopiermaschinen, Tonaufnahmeanlagen, Schmaltonfilm. Ein Schlußabschnitt ist besonderen Verfahren gewidmet; hier findet man unter anderem das in letzter Zeit häufig erwähnte Magnetophon. Ein kleiner Anhang bringt die Normen. Ein ausführliches Sachverzeichnis, wodurch das Buch auch zum guten Nachschlagewerk wird, beschließt dieses für alle Physiker und Techniker, die sich für das Gebiet des Tonfilms interessieren, wertvolle und empfehlenswerte Werk. Die an sich schon anschauliche Darstellung wird durch eine reiche Auswahl guter Abbildungen noch gefördert. H. Gollnow

J. Regler, Einführung in die Flugphysik. Grundlagen der Aerodynamik. Gr.-8°. VIII und 153 Seiten. Mit 98 Abbildungen. Leipzig 1941. Dr. Max Jänecke. RM 3,60.

Das Buch ist „jenen Lesern gewidmet, welche entweder über die einfachsten Dinge hinaus in die physikalischen, d. h. aerodynamischen Grundlagen des Fliegens einzuleben sich bemühen wollen oder

beruflich diesen Gegenstand selbst zu lehren haben bzw. im Zuge ihrer praktischen Betätigung neben mechanischen, statischen, werkstofflichen und anderen Fragen auch über die aerodynamischen Voraussetzungen orientiert zu sein wünschen". Begonnen wird mit den Grundlagen der Bewegungserscheinungen in Flüssigkeiten und Gasen, wobei die Bernoullische Gleichung abgeleitet und auf Beispiele angewendet wird. Es folgt die mathematische Strömungslehre: Die Potentialströmung und ihre Anwendung auf einfache und zusammengesetzte Strömungsbilder. Ein Abschnitt über die innere Flüssigkeitsreibung führt zur Turbulenz, Wirbelbildung und Reynoldsscher Zahl. Der letzte vorbereitende Abschnitt ist dem Widerstand gewidmet. Nunmehr folgen Tragflügeltheorie und Luftschraubentheorie. Den Abschluß bildet ein kleiner Ausblick in die Mechanik des Gleit- und Motorfluges.

Das Buch ist geeignet, einen Einblick in die physikalischen Grundlagen des Fluges, auch nach der mathematischen Seite, zu geben. Sein Studium setzt bereits einige Hochschulkenntnisse in Mathematik und Physik voraus. Leider wird es durch das Fehlen eines abecelichen Sachverzeichnisses sehr erschwert. W. Möbius

---

E. Etienne, Expeditionsbericht der Grönland-Expedition der Universität Oxford 1938. Veröff. Geophys. Inst. Univ. Leipzig. II. Serie, Band 13. 227 Seiten. Mit 98 Abbildungen und 33 Tabellen. Leipzig 1940.

Der Verfasser nahm als einziger deutscher Teilnehmer an der Oxforder Studentenexpedition nach Westgrönland teil und bearbeitete die gesamte meteorologische und geophysikalische Ausbeute in mustergültiger Weise. Zunächst gibt er einen austührlichen und sehr frischen Bericht über die Planung, die Aufgaben, den Verlauf und die Erfolge dieser Expedition, die sich vom August bis Oktober 1938 auf dem Tateratgletscher (Sukkertoppengebiet, Evighedsfjord) aufhielt. Viele Bilder gestalten diesen Bericht recht lebendig. Anfangs waren es sieben, später nur noch drei Teilnehmer. Das Hauptlager wurde in 400 m aufgeschlagen, dort war die meteorologische Hauptstation und dort wurde die Gletschergeschwindigkeit stereophotogrammetrisch gemessen. Für kurze Zeit wurde noch ein Lager in der Firnstation in 1400 m auf dem Gletscher bezogen.

Zunächst werden die Strahlungsmessungen bearbeitet und sehr sorgfältig diskutiert. Aus den Sonnenstrahlungsmessungen folgt ein Trübungsfaktor von 2,80 für alle Messungen zwischen 65 bis 80° N (wozu, wie auch bei den anderen Problemen, alle Messungen anderer Expeditionen mit benutzt wurden). Für hohe Breiten über 70° N ist mit einem größeren Durchlässigkeitsvermögen der Wolkendecke um 10–20 Proz. als in mittleren Breiten zu rechnen. Wichtig sind Strahlungsbilanzmessungen der schneebedeckten Gletscher, denn selbst an kalten Tagen ist die Strahlungsbilanz nur für wenige Stunden positiv, d. h. es wird dann mehr Strahlung von dem Schnee absorbiert als ausgestrahlt. Diese im Mittel stark negative Strahlungsbilanz der Oberfläche von 73 cal/cm² an heiteren und etwa 32 cal/cm² an bewölkten Tagen ist wohl das Bemerkenswerteste an diesen Ergebnissen. Es ist zum großen Teil eine Folge des guten Reflexionsvermögens des Schnees. Für die Frage, ob das Inlandeis Grönlands im Rückgang begriffen ist oder nicht, sind derartige Messungen ausschlaggebend.

In einer Wohnhöhle, die ähnlich der bekannten Station Eismitte der Wegener-Expedition angelegt wurde, konnten glaziologische Arbeiten ausgeführt werden. Ein Schacht von über 5 m Tiefe wurde gegraben und die Firn- und Eisschichten nach Dichte, Struktur und Jahresablagerungen untersucht. Während die Firndichte von 0,39 auf 0,55 wächst, bleibt die Eisdichte überall ziemlich konstant bei 0,869. Hier belegen viele Mikrophotographien die Darlegungen. Die Wärmeleitfähigkeit des Firns wurde mit dem Albrechtschen Gerät bestimmt und zu $= 0{,}001\,16$ cal cm^{-1} sec^{-1} $Grad^{-1}$ gefunden. Die Wärmeleitfähigkeit des Schnees hängt hauptsächlich von dessen Dichte ab, wie gezeigt wird.

Die Arbeit von P. G. Mott über die Gletschergeschwindigkeitsmessungen zeigt teilweise große Geschwindigkeiten bis zu 1 m/Tag, es überwiegen ruckartige Bewegungen, die wohl mit dem nahen Gletscherabbruch zusammenhängen.

Dieser vorbildliche Expeditionsbericht einer Gemeinschaftsarbeit deutscher und englischer Studenten läßt den Wunsch wach werden, daß es uns später wieder vergönnt sein möge, in fernen Gebieten wissenschaftlicher Arbeit nachzugehen.

R. Penndorf (Berlin)

Hugo Sirk, Mathematik für Naturwissenschaftler und Chemiker. Eine Einführung in die Anwendungen der höheren Mathematik. Gr.-8°. XII und 268 S. Mit 126 Figuren und 1 Ausschlagtafel. Dresden und Leipzig 1941. Theodor Steinkopff. Geb. RM 12,—.

Der Absicht des Verfassers, Physiker und Chemiker durch „Erarbeitung der mathematischen Begriffe an Beispielen aus den Naturwissenschaften und möglichst viel Übung an Fachbeispielen" in das Verständnis der Analysis einzuführen, muß zweifellos von vornherein – auch seitens der reinen Mathematiker – vollste Anerkennung gezollt werden. Bezüglich Anlage und Durchführung eines derartigen Unternehmens im einzelnen mögen Ansichten oder Geschmack ziemlich weit auseinandergehen – über eines aber herrscht gewiß Einmütigkeit: unklare Formulierungen oder gar grundsätzliche Fehler darf ein derartiges Buch nicht enthalten! Leider sind, wie hier nicht aufzuzählende Stichproben ergaben, gegen die vorliegende Neuerscheinung manche Einwände in dieser Richtung zu erheben. Hoffentlich bietet die Notwendigkeit einer Neuauflage dem Verfasser in absehbarer Zeit die Möglichkeit, solche Mängel zu beseitigen; vielleicht können dabei z. B. auch der Taylorsche Satz sowie die Mittelwertsätze der Differential- und Integralrechnung in Anbetracht ihrer großen praktischen Bedeutung Aufnahme und Erläuterung finden. Harry Schmidt

NACHRICHTEN

Dozenturen: An der Universität Berlin Dr. Werner Rathje für Agrikulturchemie, an der Technischen Hochschule Aachen Dr. Kurt Cruse für physikalische Chemie, an der Technischen Hochschule Stuttgart Dr. Rolf Hosemann für Physik.

Ernannt: Der Dozent für Chemie an der Universität Bonn Dr. Wilhelm Behling zum ao. Professor daselbst, der außerplanmäßige Professor an der Universität Köln Dr. Egon Hiedemann zum o. Professor für Physik und angewandte Physik an der Universität Straßburg, der Dozent für angewandte medizinische Chemie an der Universität Graz Dr. Wilhelm Halden zum außerplanmäßigen Professor ebenda, der Physiker an der Luftkriegsakademie Berlin-Gatow Dr. Oswald von Schmidt zum o. Professor und Direktor des Instituts für technische Physik an der gleichen Akademie, der bisherige o. Professor der theoretischen Physik an der Universität Göttingen Dr. Georg Joos (Chefphysiker der Zeisswerke in Jena) zum Honorarprofessor an der Universität Jena, Professor Dr. E. Rinck von der Universität Toulouse vertretungsweise zum ordentlichen Professor für anorganische Chemie am Medizinischen Forschungsinstitut der Universität Straßburg.

Gestorben: Der Konservator im Organisch-Chemischen Institut der Technischen Hochschule München Prof. Dr. Georg Rohde, der o. Professor für physikalische Chemie an der Universität Marburg Dr. Alfred Thiel, der o. Professor der anorganischen Chemie an der Reichsuniversität Straßburg Dr. Wilhelm Jander, der o. Professor der physiologischen Chemie an der Universität Marburg Dr. Friedrich Kutscher.

Ergänzung

zur Arbeit „Über die Intensitätsverhältnisse am Übermikroskop. I. Mitteilung: Die Schwärzung photographischer Platten durch Elektronenstrahlen". Von Bodo v. Borries[1]).

Als Ergänzungen, die infolge eines Fehllaufs bei der Umbruchrevision nicht mitgedruckt wurden, sind nachzutragen:

1. Zu Abschnitt 1: Die vorliegende Mitteilung wird die Schwärzung der Platten durch Elektronen behandeln, während die Untersuchung der Körnigkeit photographischer Schichten einer weiteren Arbeit[2]) vorbehalten bleiben soll. Eine dritte Untersuchung[3]) soll schließlich im Zusammenhang über die Eignung und die Empfindlichkeitsgrenzen photographischer Platten für übermikroskopische Aufnahmen berichten.
2. In Abschnitt 3 wurde für die Entwicklung der Schumann-Platten (vgl. Fig. 1–5 und 8 und 9) Final-Röhrchen-Entwickler von Agfa verwendet.
3. Die Unterschrift zu Fig. 18 muß lauten: „Die ausgezogene Kurve stellt die praktische Reichweite R der Elektronen dar, wie sie von Schonland [Proc. Roy. Soc. London (A) **104**, 235, 1923; **108**, 187, 1925] bestimmt wurde."

1) Physik. Zeitschr. **43**, H. 11/12, 190–204, 1942.
2) B. v. Borries, Über die Intensitätsverhältnisse am Übermikroskop. II. Mitteilung: Vergrößerungsfähigkeit, Körnigkeit und Auflösungsvermögen elektronengeschwärzter photographischer Platten. Zeitschr. f. angew. Photogr. **4**, H. 3/4, 1942.
3) B. v. Borries, Über die Intensitätsverhältnisse am Übermikroskop. III. Mitteilung: Eignung und Empfindlichkeitsgrenzen photographischer Platten für übermikroskopische Aufnahmen. Zeitschrift f. Phys. **119**, H. 7/8, 1942.

Angebote

Für die selbständige Bearbeitung unserer gesamten

technischen- u. Patentliteratur,

sowie für die wissenschaftliche Schulung unseres Nachwuchses auf dem Gebiete der Physik, physikalischen Chemie, Chemie, Fernsprech- und Starkstromtechnik **suchen wir geeignete Persönlichkeit** in entwicklungsfähige Dauerstellung. Der Posten eignet sich auch für Kriegsversehrte oder Akademikerinnen mit ausgesprochenem Interesse für Systematik.

Auskunft über 30 06 61

Dr. Ehlers, Berlin-Charlottenburg, Kepplerstr. 1-10

Stellenangebot

Institut für angewandte Physik

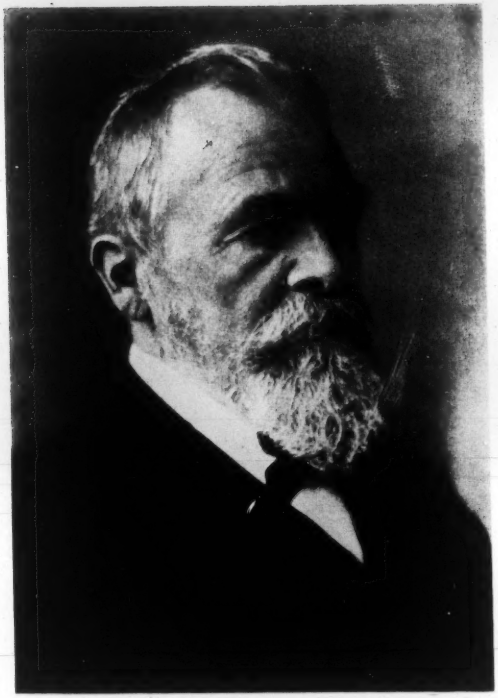
Universität Berlin N 4, Invalidenstraße 42,

sucht zu sofort vielseitig ausgebildeten

Oberassistenten

Fachrichtung Elektrotechnik und Hochfrequenz bevorzugt. Selbständige Arbeit und Habilitation möglich. Ausführliche Bewerbungsschreiben mit Unterlagen an den Institutsdirektor

Verantwortlicher Schriftleiter: i. V. Dr. Ludwig Bewilogua, Berlin. — Für den Anzeigenteil verantwortlich: A. Plohmann, Leipzig. — Verlag S. Hirzel, Leipzig C 1, Königstr. 2. — Druck: Bibliographisches Institut AG., Leipzig. — Zur Zeit gilt Anzeigenpreisliste 3. — Printed in Germany



Zum Gedenken an

CARL VON LINDE

11. Juni 1842 bis 16. November 1934